



**ACTES** DE LA  
**XV JORNADA**  
**SOBRE LA HISTÒRIA**  
DE LA **CIÈNCIA**  
**I L'ENSENYAMENT**

**“Antoni Quintana Marí”**

*Coordinació:*

**Pere GRAPÍ VILUMARA**

**Maria Rosa MASSA ESTEVE**

**Barcelona, 17 i 18 de novembre de 2017**



**SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA  
FILIAL DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS**

**ACTES** DE LA  
**XV JORNADA**  
**SOBRE** LA HISTÒRIA  
DE LA **CIÈNCIA**  
**I L'ENSENYAMENT**



ACTES DE LA  
XV JORNADA  
SOBRE LA HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA  
I L'ENSENYAMENT

“Antoni Quintana Marí”

*Coordinació*

Pere GRAPÍ VILUMARA

María Rosa MASSA ESTEVE

Barcelona, 17 i 18 de novembre de 2017



SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA  
FILIAL DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

Dibuix de la coberta: *Émilie du Châtelet* (1706-1749). Retrat de Maurice Quertin de La Tour. Col·lecció privada, Choisel, Château de Breteuil.

© dels autors de les ponències  
© 2018, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica,  
filial de l'Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició  
Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: octubre de 2018

Compost per Fotoletra, SA



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

## SUMARI

M. R. MASSA ESTEVE; P. GRAPÍ VILUMARA. <i>Presentació</i> .....	7
N. SOLSONA PAIRÓ. <i>Una mirada didàctica a les receptes de Marie Fouquet</i> .....	9
A. M. RENOM. <i>Infermera o matemàtica? La Florence Nightingale menys coneguda</i> .....	15
A. ROCA ROSSELL. <i>Clotilde Cerdà (1861-1926) i els orígens de l'ensenyament professional per a dones a Catalunya</i> .....	25
E. CLÈRIES TARDÍO. <i>Maria Gaetana Agnesi. La prodigi coneguda per bruixa</i> .....	33
P. J. HERRERO PIÑEYRO; A. LINERO BAS; A. MELLADO ROMERO. <i>Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula de secundaria</i> .....	41
S. BELLA; M. BLANCO. <i>Comentaris sobre l' 'Analyse des infiniment petits' de l'Hospital (1696-1768): interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals del càlcul diferencial</i> .....	49
A. CAMÓS CABECERAN. <i>El viatge del 'Beagle', la gran aventura de Darwin. Una proposta de treball interdisciplinari</i> .....	57
I. GUEVARA CASANOVA; C. PUIG-PLA. <i>'Ganita' i 'Kuttaka', càlcul en la matemàtica índia del període clàssic (400-1200)</i> .....	63
J. BERENQUER. <i>El càlcul diferencial al segle XVIII en una classe de matemàtiques</i> .....	71
J. M. PONS POBLET. <i>Com les TIC poden ajudar l'ensenyament de la història de la ciència</i> .....	81
L. MORENO MARTÍNEZ; M. A. CALVO PASCUAL. <i>La historia de la química en el marco LOE de ESO y bachillerato. Una mirada conjunta desde la didáctica y la historia de las ciencias</i> .....	93
E. Pérez Canals. <i>Experiments crucials al laboratori</i> .....	99
P. GRAPÍ. <i>Antoine-François Fourcroy: organitzador de la química i del seu ensenyament a la França postrevolucionària</i> .....	105
D. MARTÍNEZ VERDÚ. <i>La concepción didáctico-cognitiva de la enseñanza de las matemáticas en Benito Bails (1731-1797)</i> .....	115
M. MENÉNDEZ MOTTA. <i>El juramento hipocrático en la enseñanza médica ayer y hoy</i> .....	129
C. PUIG-PLA; I. GUEVARA CASANOVA. <i>Maons, altars i versos: els singulars mètodes de transmissió dels coneixements matemàtics i astronòmics a l'antiga Índia</i> .....	135



## PRESENTACIÓ

Ens complau presentar-vos l'edició de les *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, que va tenir lloc els passats 17 i 18 de novembre de 2017 a l'Institut d'Estudis Catalans de Barcelona. Sens dubte, això és un símptoma de la bona salut de la Jornada.

Les cinc sessions de la quinzena jornada, amb vint-i-dues comunicacions, van cobrir diferents àmbits temàtics. Una sessió sobre història de la ciència i educació científica, amb cinc comunicacions; dues sessions sobre la immersió de la història de la ciència a l'aula, amb nou comunicacions, i dues sessions més sobre la nova temàtica proposada, ciència i gènere, amb vuit comunicacions. Aquestes contribucions van posar en relleu l'estat actual de les recerques que es duen a terme en la nostra àrea i van mostrar les aportacions d'intervenció directa a l'aula per fer visible la història de la ciència en els ensenyaments secundaris i universitaris. La majoria d'aquestes comunicacions les trobareu publicades en aquestes actes.

Voldríem destacar també que el lliurament del Premi Antoni Quintana Marí per a treballs de recerca al batxillerat en l'àmbit de la història de la ciència, la tècnica i les matemàtiques, va anar acompanyat d'una breu i excel·lent presentació del treball premiat, com ja s'havia fet en l'edició anterior. L'èxit d'aquestes presentacions ens obliga a repetir aquest format en les properes edicions del premi. Aprofitem l'ocasió per a felicitar l'alumne premiat, Marc Piquer i Méndez, que va guanyar el premi amb el treball: *Zero, la joia que vingué d'Orient. Història i importància del nombre zero*, tutoritzat pel professor Joan Miquel Duran de l'Escola Joan Pelegrí de Barcelona. El treball, com el seu títol indica, ens presenta un recorregut històric de la introducció del nombre zero des de l'antiguitat fins al segle XVII.

Finalment, cal constatar que continuant amb la idea iniciada en la XIII Jornada d'introduir noves sessions temàtiques, aquesta vegada es va proposar la temàtica «ciència i gènere» amb el fil conductor de la història de la ciència. L'acollida va ser espectacular i s'hi van presentar nou comunicacions, algunes sobre dones científiques preocupades per l'ensenyament com ara Maria Gaetana Agnesi (1718-



1799) o la metgessa Dolors Aleu i Riera (1857-1913). També la conferència de la jornada abordava aquesta temàtica, la conferenciant convidada va ser la doctora Carmen Magallón Portolés, fundadora l'any 1993 del Seminario Interdisciplinar de Estudios de la Mujer (SIEM) de la Universidad de Zaragoza, i que inclou entre els seus temes d'investigació «la història de les dones en la ciència». La doctora Magallón va dissertar en una conferència titulada: «¿Cómo pueden los estudios sobre ciencia y género enriquecer el currículo y la innovación educativa?». La seva conferència va fer un repàs als estudis de ciència i gènere, començant amb un text de 1982 de Rossiter, va continuar amb un altre de Harding, de 1986, i finalment va centrar les seves anàlisis en el programa d'investigació més actual, *Gendered Innovations*, que es desenvolupa als Estats Units amb grups de treball al Canadà, Europa i Àsia. La doctora Magallón es plantejava si era possible l'aplicació d'aquest programa a l'ensenyament. Es va plantejar preguntes (a si mateixa i a nosaltres) com ara: Com podem treure a la llum els biaixos de gènere que impregnen algunes teories que estudiem? És possible i desitjable aprofitar el poder creatiu del sexe-gènere per a la innovació educativa? Després de la conferència es va propiciar un apassionant i intens debat sobre el tema, que va afavorir un notable grau de reflexió i un enriquidor intercanvi d'opinions.

Maria Rosa Massa Esteve  
Pere Grapí Vilumara

## UNA MIRADA DIDÀCTICA A LES RECEPTES DE MARIE FOUQUET

**NÚRIA SOLSONA PAIRÓ**

UNIVERSITAT AUTÒNOMA BARCELONA.

Paraules clau: *segle xvii, ciència, didàctica, medicina*

### **A Teaching Glance to Marie Fouquet's Prescriptions**

*Summary: The article retrieves the book 'Obres Medico-Quirurgicas' of Marie de Maupeou Fouquet, viscountess of Vaux (1590-1681). The book was written in the historical context of Renaissance University, in which medicine as academic knowledge was based in the galenic conception of humours. The work had been published many times in French and another languages for two centuries, in which period the number of other receipts and appendixes increased. Our proposal is to consider three receipts about oils included in the book edition of 1700 in order to work in classroom as an application activity.*

*Key words: 17th century, science, science education, medicine*

### **Introducció**

Cap a finals del segle xv i més concretament durant els segles xvi i xvii, emergeixen a Europa una gran quantitat de textos de tipus eminentment pràctic per a ús domèstic de les «casas cumplidas», segons l'expressió del que fou l'editor del *Regalo de la Vida Humana*, Pedro de Sada (Cabré, 2008). Aquestes compilacions reuneixen agrupacions variables de procediments per a l'elaboració i administració d'aliments, medecines, cosmètics, cura de la roba, elaboració de conserves, producció de sabons, tints i vernissos... L'èxit d'aquesta literatura és sens dubte un fet notable, com ho són també la varietat dels seus continguts i la diversitat de tradicions de les quals sorgeixen.

El coneixement sobre algunes de les modalitats del fenomen, d'abast europeu, és prou conegut (Cabré, 2008). Els llibres de secrets, els anomenats *commonplace books* (florilegi de llocs comuns o miscel·lànies de diferents temes) en la

tradicció anglesa o els *husbandry books* (manuals per a la gestió de múltiples aspectes de la vida i de l'economia domèstica), els règims de salut o els receptaris de medicina destinats a ser utilitzats per persones sense vincles estrets amb les ocupacions sanitàries.

Durant el segle XVI era habitual trobar en algunes cases de famílies educades llibres manuscrits, en els quals entre receptes de cuina o consells d'economia domèstica s'hi barrejaven diferents remeis mèdics. Des que existeix el llibre imprès han existit obres proveïdores de consells, secrets i receptes mèdiques dirigits a un públic general i ampli, format per qui podia llegir-ne els continguts o per tercers que l'escoltaven. Un possible indicador del nivell d'alfabetització de la França de finals del segle XVII és el 20 % de la població que signava l'acta de matrimoni, el 1686 a la zona nord de França.

Al segle XVII, la medicina com a saber acadèmic es va conformar amb la concepció dels quatre elements sublunars que està a la base de la concepció galènica dels humors. Els seus camps d'acció terapèutica foren la dissolució i evacuació de certs humors, com la bilis i altres fluids corporals, i la purificació i neteja de l'interior del cos; també hi ha fàrmacs d'acció astringent i assecant, que s'utilitzaven per a la disminució de certes secrecions.

Les publicacions relacionades amb la conservació i el restabliment de la salut tenen una importància creixent a partir del segle XVII. Aquest fenomen adquireix sentit en l'ampli context d'una nova valoració de la vida humana, i de la preocupació pel creixement i la salut de les poblacions com a recurs per als governs davant del creixement de l'Occident europeu. També de la concepció de la salut corporal com a un element per a aconseguir la prosperitat social. L'èxit dels manuals de medicina fou transnacional i es correspon amb el creixement d'unes classes socials que es podien permetre la compra de llibres i començaven a considerar la salut com un bé de consum. Un dels objectius dels receptaris és que les persones profanes poguessin actuar per elles mateixes per conservar la salut i combatre les malalties. Algunes de les substàncies incloses en les receptes coincideixen amb les que la química del segle XVII coneixia. Nicolas Lémery (1645-1715), en el *Cours de Chimie* (1756), en el prefaci de l'autor indica (Lémery, 1756: IX):

La majoria dels Autors que han parlat de Química, han escrit amb tanta obscuritat, que sembla que han fet el possible per no ser entesos; & es pot dir que ho han aconseguit, ja que aquesta Ciència ha estat pràcticament amagada durant diversos segles, & i només ha estat coneguda per poques persones. Això és en part el que ha dificultat un més gran progrés com el que s'ha pogut fer en la Filosofia, ja que és impossible de raonar com a bon Físic, si no sap la manera com la natura fa les seves operacions, quelcom que està perfectament ben explicat per la Química. Ella ens ensenya com les Aigües vidriòliques & metàl·liques es coagulen en les entranyes de la terra, & fan els Minerals, els Metalls, & les pedres, segons les diferents matrius que es troben. Ella ens dona una idea sensible de la vegetació & del creixement dels animals, per les fermentacions & per les sublimacions. Ella ens ensenya per la destil·lació, com el Sol havent rarificat les aigües del Mar, les eleva en núvols, que després destil·len en pluges o en rosades; en resum per la separació del pur de l'impur, ella ens fa comprendre l'ordre que Déu ha observat en la creació de l'Univers.

Marie de Maupeou Fouquet, vescomtessa de Vaux (1590-1681) fou directora de l'Hospital Filles de la Providència el 1658, i superiora de les Dames de la Propagació de la Fe el 1664, a París. La seva cultura religiosa li donà accés a la cultura lletrada. Per tenir cura dels malalts promogué la publicació del *Recueil des remèdes faciles et domestiques, choisis et expérimentés & tres aprouvez pour toute sorte de Maladies internes & externes...* El llibre va tenir més de mig centenar d'edicions en francès i fou tradu-

it a l'alemany, a l'italià i al castellà. L'obra de Marie Fouquet va tenir molt bona acollida, fou molt popular i va tenir vida pròpia. Cada edició incloïa algunes receptes o annexos més que l'anterior.

L'edició feta a Dijon per Jean Ressayre el 1700 porta el títol de *Suite du recueil des remedes faciles et domestiques de Madame Fouquet, choisis et expérimentés & tres aprouvez pour toute sorte de Maladies internes & externes...* Les receptes estan agrupades en funció de la malaltia que tracten o de la finalitat dels remeis i inclou aproximadament unes cinc-cents trenta receptes.

L'edició de 1700 té una estructura semblant a les edicions anteriors, de 1676, 1677, 1679, 1682, 1684, 1687 i 1690. Després dels pròlegs corresponents on s'elogien les virtuts de l'obra, hi ha una explicació de la «Teoria dels humors que es troben en el cos humà» i a continuació venen les receptes ordenades per ordre alfabètic.

### **Marc teòric**

Considerem l'activitat científica com un producte de l'acció humana, condicionada per l'ambient cultural, els recursos i les oportunitats pròpies de la societat, i del moment històric en el qual s'ha desenvolupat el treball. A més, la dimensió docent i educativa que va tenir l'activitat científica en totes les èpoques ens interessa de manera especial. La història de la ciència és important perquè proporciona contextos als coneixements emergents i treu a la llum les aportacions al coneixement científic que no s'han tingut en compte perquè van ser desenvolupades per col·lectius poc rellevants, com per exemple les dones. Ens interessa la reconstrucció de receptes històriques perquè el seu format textual és més amable que altres textos històrics per a utilitzar-los en les classes de química, sense caure en l'anacronisme ni en l'hagiografia.

Cal estudiar l'evolució de la producció científica femenina amb la convicció que aquesta part de la història no concerneix només les dones, sinó la ciència en la seva totalitat. En el moment que aquest coneixement esdevingui herència comuna llavors la història de la ciència serà completa. És a dir, cal llegir els testimonis i escrits de les dones no sols per fer una història de la ciència o una història de les dones, sinó també per fer una història de la ciència contemporània que inclogui les dones, de la mateixa manera que inclou els homes.

Podem analitzar la figura de Marie de Maupeou seguint Natalie Zemon Davis (1999: 19), una de les historiadores més imaginatives i innovadores de l'Europa moderna, especialista en els segles XVI i XVII que dialoga amb els personatges que estudia i intenta explicar els seus relats de forma relacional. Madame Fouquet forma part de la cadena de les tradicions i de la memòria cultural dels segles XVII i XVIII. La publicació del llibre de Madame Fouquet permet analitzar el rol de les dones en la circulació del coneixement en els dos papers, ja sigui com a autores o bé com a audiència, posant especial èmfasi en la il·luminació de les complexes relacions entre ciència, gènere i història de la ciència.

### **Les receptes de Marie Fouquet sobre els olis**

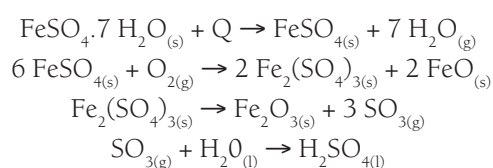
En l'edició de les obres de Madame Fouquet feta a Dijon el 1700 hi ha tres receptes que criden l'atenció perquè tracten de materials alquímics i no estan recollides en les edicions posteriors en castellà, que són una traducció de l'edició de Lió de 1739. Són les receptes: «Per a fer oli de vidriol», «Per a fer oli de sofre» i «Per a fer oli d'antimoni».

Proposem l'estudi d'aquestes receptes per a una classe de batxillerat, com un petit treball de recerca. No volem establir una relació de contínuum entre la recepta de Marie Fouquet i l'explicació química actual, sinó que volem intentar fer una reconstrucció històrica del fenomen.

La primera recepta és «Per a fer oli de vidriol» i diu (1700: 60):

Preneu tot el «vidriol verd» que vulgueu, «alum & sal de nitre» la octava part del vidriol, reduïu bé a pols, & ho posareu en una carbassa corbada, feu un petit foc al voltant, a sota hi posareu un recipient per recollir el licor que «destil·larà. La realització és molt perillosa per als que no saben Química».

Cal remarcar que la recepta es prepara per destil·lació, una de les tècniques de laboratori més utilitzades a l'època. En llenguatge alquímic, el vidriol verd es correspon amb el sulfat de ferro (II)  $[\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}]$ , l'alum és un sulfat alumínic potàssic  $[\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}]$ , i la sal de nitre es correspon amb el nitrat de potassi  $[\text{KNO}_3]$ . L'objectiu de la reacció és obtenir oli de vidriol, que correspon a l'actual àcid sulfúric  $[\text{H}_2\text{SO}_4]$ . La recepta es basa en la descomposició de sulfats a altes temperatures, d'acord amb les equacions següents:



La segona recepta de Fouquet (1700: 62) és «Per a fer oli de sofre» i diu:

Preneu un vas de vidre o de terra plomada fet en forma de campana, pengeu-lo en l'aire, a sota hi posareu un colze més baix, un recipient molt més ample que la campana, & enmig d'aquest recipient un petit pot ple de sofre, on hi posareu foc; els fums (o vapors) seran recollits per la campana, & es convertiran en «licor d'oli», i cauran en l'esmentat recipient.

Quan el sofre s'escalfa just per sobre del seu punt de fusió, entre 112,8 °C (ròmbic) i 119 °C (monoclínic), es forma un líquid molt fluid de color groc pàl·lid, però si la temperatura augmenta el color s'enfosqueix i disminueix la seva fluïdesa. A 180-200 °C el líquid es torna marró fosc i és tan viscos que no cau en capgirar al recipient, però si la temperatura augmenta el líquid es fa cada vegada més fluid i a 444,6 °C bull (Babor & Ibarz, 1964: 574).

La tercera recepta de Fouquet (1700: 65) és «Per a fer oli d'antimoni» i diu:

Preneu antimoni, polvoritzeu-lo, incorporeu-lo a un bon *vinagre* [en cursiva en el manuscrit] destil·leu-lo; deixeu que s'infusionin junts fins que el vinagre es converteixi en vermell fort, per després colar-lo & torneu a posar vinagre sobre aquest antimoni, que fareu infusionar sobre cendres calentes, & quan el vinagre sigui vermell, el colareu de la mateixa forma que abans, & ho tornareu a posar com el primer cop, repetiu-ho fins que el vinagre no es torni vermell, una vegada fet això prendreu els vinagres que haureu colat & els fareu destil·lar; el primer licor que destil·li, caldrà separar-lo, després vindrà una matèria o licor de diferents colors que serà l'oli esmentat, & i que és la veritable quinta essència de l'antimoni esmentat, el qual a més d'altres virtuts és excel·lent per netejar tota classe d'úlceres & pústules, és també molt perillós de produir.

L'antimoni era una substància molt popular als laboratoris durant el segle XVII. Paracelsus (1493-1541) ja havia explicat com l'antimoni podia convertir-se en un excel·lent purgatiu. La discussió es

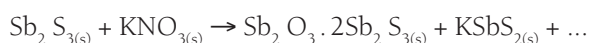
produïa entre els partidaris de la preparació de medecines a partir dels minerals i els metalls i els partidaris de preparar medecines químiques, com era el cas de la Universitat de Montpeller.

Probablement l'antimoni que esmenta Madame Fouquet és trisulfur d'antimoni [Sb<sub>2</sub>S<sub>3</sub>]. L'antimoni a vegades es troba en estat lliure, però el seu origen principal és el sulfur, un mineral negre cristal·lí anomenat estibina. El sulfur d'antimoni s'ha utilitzat com a medicament i per a ennegrir les cel·les des dels temps més remots. Aquesta última pràctica s'esmenta a la Bíblia (Llibre II dels Reis, IX,30; Ezequiel, XXIII,40), fet que demostra que els hebreus de l'època primitiva coneixien aquest compost. Els compostos solubles d'antimoni són tòxics (Babor & Ibarz, 1964: 648).

Les edicions de les obres de Madame Fouquet de Tolosa (1684), Lió (1685) i València (1872) no inclouen les receptes dels olis que estem analitzant. Però hi ha una recepta anomenada «Manera de preparar l'antimoni» que diu (Fouquet, 1872: 310):

414. Picar en trossos grossos l'antimoni, i posar-lo en un gresol encès diferents vegades, amb la mateixa quantitat de sal pedra (salpetre, nitr<sup>1</sup>), remenant-lo amb un ferro rogent; després d'això s'aboca, i amb el gresol fred s'agafa el que hi ha al fons. Si el color és groc, és senyal que està ben preparat. El que queda per sobre serveix per l'orina. La dosi és de dos a quatre grams de substància, i en infusió de cinc a deu grams. És bo per a tot tipus de febres intermitents prenent-lo amb un rovell d'ou, i després mig vas de vi o un caldo; i després d'haver vomitat dues o tres vegades, se li dona al pacient mig vas de terrissa per facilitar el vòmit. Es donarà en dejú o sis hores després de menjar, o al començament de la febre.

Marie Meurdrac (1999) ja havia proposat la mateixa recepta amb el nom «Del Crocus d'Antimoni». El crocus d'antimoni o safrà d'antimoni és el precipitat que s'obté quan es tracta de sulfur d'antimoni (III) amb una sal potàssica, segons l'equació següent:



Nicolas Lémery (1756) dedica el Capítol IX a l'antimoni. Proposa la preparació de vint-i-quatre derivats d'antimoni. El Capítol XVIII, el dedica al vidriol, amb nou receptes. Entre elles, destil·lació del vidriol, vidriol vomitiu i oli de vidriol dulcificat. El Capítol XXII el dedica al sofre, amb vuit receptes: flor de sofre, magisteri de sofre i esperit de sofre. Diu Nicolas Lémery: «El vidriol en general és una de les drogues més útils de la Medicina; se n'han fet quantitat de remeis excel·lents» (Lémery, 1756: 519).

## Conclusions

Les tres receptes seleccionades de l'edició de Dijon de Marie Fouquet (1700) permeten treballar a l'aula la reconstrucció de receptes històriques. En la primera recepta, la preparació de l'oli de vidriol, es tracta de buscar la relació amb la descomposició de sulfats a altes temperatures, seguint les equacions químiques que hem indicat. En la segona recepta, la preparació d'oli de sofre, es pot treballar la fusió del sofre. La tercera recepta, la preparació de l'oli d'antimoni, és la que presenta més dificultats ja que no hem aconseguit identificar exactament de quin procés químic es tracta. Però podem reconstruir la preparació del sulfur d'antimoni segons l'equació química indicada.

---

1. Nitrat de potassi.

## Referències bibliogràfiques

BABOR, J. A.; IBARZ, J. (1964), *Química General Moderna*, Barcelona, Marín.

CABRÉ PAIRET, M. (2008), «Los consejos para hermostear (“libros” I-III) en el Regalo de la Vida Humana de Juan Vallés». A: SERRANO LARRAYOZ, F. (coord.), *Regalo de la Vida Humana*, vol. 2. Pamplona, Gobierno de Navarra, 171-202.

FOUQUET, Marie (1700), *Suite du recueil des remèdes faciles et domestiques de Madame Fouquet, choisis et expérimentés & très approuvés pour toute sorte de Maladies internes & externes...*, Dijon, Jean Resayre.

FOUQUET, Marie (1872), *Obras Medico-Quirúrgicas de Madama Fouquet*. València, Libreria de Juan Mariana.

LÉMERY, Nicolas (1756), *Cours de Chimie contenant la manière de faire les opérations qui sont en usage dans la Médecine, par une Méthode facile*, Paris, Jean Thomar Herissant, [en línia] <<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k918604/f15.image>> [Darrer accés: 12/12/2017].

MEURDRAC, Marie (1999), *La Chymie charitable et facile en faveur des dames* (1666), Paris, CNRS.

ZEMON DAVIS, Natalie (1999), *Mujeres en los márgenes*. València, Càtedra.

## INFERMERA O MATEMÀTICA? LA FLORENCE NIGHTINGALE MENYS CONEGUDA

**ANNA M. RENOM**

IES AGUSTÍ SERRA I FONTANET.

Paraules clau: *Florence Nightingale, estadística, diagrama polar, Infermeria, Crimea*

### **Nurse or Mathematician? The Least Known Florence Nightingale**

*Summary: Florence Nightingale is a British icon: she is internationally recognised as the transformer of nursing into a professional practice, the remodelling of the British military hospitals and the setting of the grounds of the British Social Security. In 1883 she was awarded the Royal Red Cross from Queen Victoria, and in 1907 the Order of Merit of the United Kingdom from King Edward VII.*

*But it is less known that Ms. Nightingale was an important mathematic figure: she was the first woman to be admitted by the exclusive Royal Statistical Society of London and Honorary Member of the American Statistical Association. Ms. Nightingale's indisputable achievements in the field of nursing were only possible because she was the pioneer in the statistical analysis of applied data to social sciences.*

Key words: *Florence Nightingale, statistician, area charts, nursing, Crimea*

### **Família i educació**

La família Nightingale pertanyia a la classe benestant de l'Anglaterra victoriana. Eren part de l'aristocràcia intel·lectual: de tendència liberal, tenien una gran influència política i social en un moment de grans canvis, la Revolució Industrial. Van fer fortes campanyes per a la reforma social i política, eren actius en els moviments en pro de la salut pública, la reforma de les presons, els drets de les dones (inclosa una educació igualitària) i l'abolició de l'esclavitud.

William Nightingale es va formar a Cambridge i va esdevenir un expert en la naixent ciència de l'epidemiologia. L'educació inicial de les seves dues filles (Part-



henope i Florence) es va fer per part d'institutrius, però aviat es va encarregar personalment d'ensenyar-los llatí, grec, història, filosofia, matemàtiques i música (Attewell, 1998: 174). La seva mare, Fanny, les mantenia constantment ocupades, sanes i ben relacionades amb gent de la seva edat.<sup>1</sup>

Tractava d'orientar-les cap a matèries *adients* per a les dones, que només havien de ser futures bones esposes: qüestions sobre història o filosofia, natural i moral.

Les dues germanes van gaudir d'una sòlida formació, però la Florence tenia una ambició desmesurada pel coneixement i anteposava l'estudi a qualsevol altra activitat. Era una experta en grec clàssic, filosofia i política. Va mostrar dots excepcionals per a les matemàtiques des de molt petita<sup>2</sup> i va reclamar als seus pares un ensenyament més profund, que no va aconseguir fins després de molts enfrontaments, anys més tard. Se sap que la va tutoritzar James Joseph Sylvester<sup>3</sup> (Lipsey, 1993: 12), però gran part de la seva formació va ser autodidacta: aconseguia publicacions científiques i les estudiava, i, ja adulta, es va relacionar personalment o per correspondència amb aquells científics o especialistes en les matèries del seu interès.<sup>4</sup>

Els viatges també van ser part del seu aprenentatge: primer amb la família, per Europa durant gairebé dos anys entre 1837 i 1938 (McDonald, 2010: 5-6). Les dues germanes adolescents dominaven els idiomes francès i alemany. Visitaven museus, teatres, monuments i biblioteques, així com als intel·lectuals,<sup>5</sup> escriptors, matemàtics, economistes, investigadors i professors universitaris d'allà on anaven. Més tard va viatjar sola per Anglaterra, estudiant la indústria a les Midlands, l'agricultura del sud i la ciutat de Londres.

### La rebel·lia

El 1937 viu una experiència religiosa, una «crida de Déu», com ella mateix escriu, i se sent abocada a fer quelcom important en el Seu nom, sense buscar reputació. No va ingressar en cap orde religiós, però es negava a casar-se i a tenir una vida ordinària: va rebutjar dues propostes de matrimoni (Henry Nicholson, 1844, i Richard Monckton Milnes, 1848) amb la total incomprensió de la seva família.

Les dones de la seva classe no havien d'aspirar a res més que a ser bones esposes i Florence pretenia desenvolupar-se professionalment, dubtant entre l'ensenyament de delinqüents o la infermeria.<sup>6</sup> Era habitual sentir-la queixar-se per la poca rellevància de les dones: «Visc en una societat on els homes parlen de política i les dones només poden parlar dels seus marits».

1. Les germanes eren part d'un gran clan, format per uns vint cosins d'edats similars: els Bonham Carter, Nicholson, Smith, Shore..., famílies aristòcrates i cultes. S'hi afegien famílies rellevants com els Byron (la matemàtica Ada Lovelace pertanyia al grup, tot i ser sis anys més gran que la Florence).

2. Es conserven taules estadístiques fetes als nou anys on cercava un patró per normalitzar les dimensions de diverses fruites, petxines...

3. Sylvester va desenvolupar la teoria d'invariants amb Cayley, va fer importants treballs en la teoria de matrius i desenvolupà el discriminant per a equacions cúbiques.

4. Florence va ser una prolífica escriptora fins a la seva mort, als 90 anys. Ha deixat diaris, més de dotze mil cartes i fins a dues-centes publicacions. El projecte «The Florence Nightingale collaborative database» de la Universitat de Boston actualment està digitalitzant gran part de la seva obra escrita.

5. Julius Mohl, Jean-Jacques Ampère, Prosper Mérimée, Mary Clarke, Claude Fauriel, Victor Hugo, Turguénev, Sismondi, Mme. de Chateaubriand...

6. Va treballar a les Ragged Schools, finançades per la seva pròpia família, Lord Shaftesbury, Charles Dickens i altres benefactors benestants. L'escola pública no existia i la majoria de la població era analfabeta. Per imaginar com era, en tenim prou pensant en *Oliver Twist*, el model que Dickens va prendre com a referència.

D'adolescent ja va sentir un profund conflicte entre la seva voluntat d'acció i el paper que socialment havia d'acceptar. Amb 25 anys Florence havia decidit aprendre infermeria, per la qual cosa es documentava sobre tot allò referent a hospitals, atenció als malalts i condicions socials dels més pobres. Va intentar entrar com a aprenent al sanatori Salisbury, dirigit pel Dr. Fowler, amic de la família. Els seus pares ho van impedir: la infermeria llavors era només per a dones de classe mitjana-baixa.

Florence viatja per Europa amb el matrimoni Bracebridge en dos viatges de dos anys: entre 1847 i 1849 i entre 1849 i 1951 (Attewell, 1998: 175). Visita França, Itàlia, Egipte i Grècia. Estudia i documenta hospitals i institucions filantròpiques com St. Vicent de Paül, a Alexandria, la majoria regentats per religiosos catòlics. Cau malalta a Egipte, i ingressa com a pacient a l'hospital Kaiserswerth Anstalt, que havia intentat visitar sense aconseguir-ho per a aprendre infermeria. Només hi va estar dues setmanes, durant les quals es va recuperar i va preparar un informe de gestió de l'hospital impulsat pels fundadors, el Pastor Fliedner i la seva esposa. Pretenien descriure els treballs de Kaiserswerth i implementar el seu model a Anglaterra.

### La professionalització

A la seva tornada, el 1951, i després de moltes discussions familiars, els Nightingale van permetre a Florence aprendre infermeria i va tornar a Kaiserswerth durant tres mesos. Va recollir innumerables dades de pacients i mètodes, i va aprendre gestió hospitalària, amb un èmfasi especial en el disseny dels edificis i la ventilació. Les pràctiques d'infermeria a Alemanya eren molt millors que les britàniques: les infermeres femenines dels hospitals anglesos procedien de les classes més modestes de la societat i les contractaven bàsicament per a vigilar els pacients i mantenir-los nets. La majoria eren bevedores, calloses i acostumades a prestar serveis sexuals als metges, als assistents i fins i tot als pacients. No hi havia gaire per aprendre d'elles. La infermeria tècnica (embenats, cures físiques, atenció a la cirurgia) era realitzada per assistents masculins.

Influenciada pels diferents informes publicats per membres del corrent sanitarista,<sup>7</sup> va imposar-se un objectiu: millorar la salut pública fent-se càrrec d'un hospital o infermeria on pogués entrenar un cos d'elit de dones supervidores. Pretenia que les seves alumnes revolucionessin l'atenció i la cura dels pacients en tots els hospitals públics del país. Era un objectiu ambiciós, i més encara considerant que, com la majoria de les dones victorianes, no tenia cap qualificació (Paternoster, 2018). I tampoc no l'hauria pogut obtenir: no existia una formació específica per a infermeres.

Al febrer de 1852 marxa a París i visita tots els centres mèdics de la ciutat. Recopila informes, estadístiques, pamflets i prepara qüestionaris que sistematitzin la recollida de dades a les institucions hospitalàries. Queda impressionada per l'Institut Lariboisière, estructurat en pavellons ventilats i lluminosos. Començava a relacionar el disseny i la infraestructura dels edificis hospitalaris amb la seva eficiència en la cura dels malalts.

El 1953 la Institució de Senyores Invàlides de l'alta societat a Harley Street de Londres li ofereix el càrrec de superintendent. Accepta el càrrec sense sou, amb la condició que se li doni absoluta autonomia en la gestió. Revoluciona l'hospital: fa instal·lar muntaplats, aigua calenta a les habita-

---

7. William Farr, metge, epidemiòleg i estadístic, publicava els seus informes anuals de mortalitat i morbiditat des del seu càrrec a la General Register Office. L'unitari T. Southwood Smith publicava *Filosofia de la salut pública (1837-39)*, on s'educava el públic en la necessitat d'emprar aigua neta i tenir un bon sistema de canalització de residus. Edwin Chadwick el 1842 publicava *Les condicions sanitàries de les classes treballadores* (Gorostiza, 2014: 11-12).

cions, un sistema de timbres, renova la llenceria, matalassos, tapisseries malmeses i brutes (els llençols estaven menjats per les rates)... (Gill, 2005: 311). Negocia amb els marxants dels mercats per obtenir bon menjar fresc. Acomiada personal ineficient i el substitueix per gent nova. Ho documenta tot en informes i redueix el cost econòmic diari per pacient, a més de millorar la qualitat en l'atenció. En sis mesos aconsegueix que la Institució funcioni com un rellotge.

La seva reputació de gestora creix i li demanen que es faci càrrec de la reorganització de l'Hospital Kings College. Gairebé alhora, Sydney Herbert, parlamentari amic de la família, li encarrega que faci un informe recollint informació dels diferents hospitals de Londres: s'estava vivint a la ciutat la quarta epidèmia de còlera en cinc anys, i la de 1854<sup>8</sup> va matar set-centes persones només al barri del Soho en una setmana. Tot va quedar interromput per la Guerra de Crimea.

### L'infern a la terra: Crimea

Entre 1853 i 1856 la Guerra de Crimea enfronta Rússia i la coalició formada per França, Gran Bretanya, Sardenya i l'Imperi otomà. Crimea es va convertir en una guerra molt mediàtica,<sup>9</sup> gràcies als corresponents de guerra del diari *The Times* William Howard Russel i Thomas Chenery: relataven les condicions dels soldats i les carències sanitàries que patien als hospitals militars, on els ferits morien d'infeccions i plagues. El secretari d'Estat per a la Guerra, Sydney Herbert, va nomenar Florence com a superintendent del Cos Femení d'Infermeres de les Forces Angleses per als Hospitals Militars de Turquia.

Florence va fer ús dels seus contactes, recaptant material i fons per a l'hospital fent estimacions del que necessitaria sobre l'anàlisi de les dades que havia recollit al llarg dels anys. Va reclutar personalment un equip de 38 infermeres, amb les quals va marxar cap a l'hospital de Scutari, a Istanbul, on va arribar a l'octubre de 1854.

Scutari era un hospital militar preparat per a atendre 1.400 malalts entre l'edifici principal i els barracons annexos. Les batalles<sup>10</sup> es disputaven amb milers d'homes i Florence escriu que només en 15 dies van arribar més de 4.000 ferits (entre desembre de 1854 i gener de 1855). D'un exèrcit de 37.232 homes, 9.003 estaven malalts. La presència imposada d'un grup d'infermeres britàniques resultava una molèstia per als militars i l'oficial mèdic al càrrec, Dr. Duncan Menzies, va amuntegar les dones en tres habitacions sense els mínims requeriments i els va recordar que únicament estaven al servei dels metges.

Les condicions higièniques eren infames, no hi havia benes, llençols, material quirúrgic, menjar ni aigua potable. Les plagues de còlera eren habituals, els polls i les rates campaven lliurement entre els malalts amuntegats pels passadissos i els patis. Els pous d'aigua estaven contaminats per residus humans i animals.

Florence va organitzar immediatament una bugaderia i una cuina. Els metges van deixar-les intervenir en l'assistència mèdica només quan els va desbordar una arribada massiva de nous ferits. El sistema de triatge de l'atenció als malalts que va imposar Florence al seu equip xocava amb el que era tradicional a l'exèrcit, on s'atenia primer l'oficial de més rang.

8. John Snow, metge, va georeferenciar amb un gràfic estadístic la relació dels malalts amb els pous d'aigua de la ciutat.

9. Per primera vegada hi havia fotografies que mostraven els camps de batalla i les condicions sanitàries dels hospitals militars.

10. La famosa «Càrrega de la Brigada Lleugera» del 25 d'octubre liderada per Lord Raglan va deixar més de 300 morts i centenars de ferits. A la batalla d'Inkerman, deu dies després, «La batalla dels soldats», van morir més de 630 soldats i gairebé 2.000 van ser fets presoners. No es compten els ferits.

Va sistematitzar la cura dels malalts: dietes específiques que pagava amb els fons que havia portat, subministraments mèdics, roba, revisions i mudes regulars. Reclamava material a Londres i va dissenyar un sistema de traçabilitat dels subministraments perquè es perdien en els transports, a les duanes per pràctiques corruptes, i per la mala gestió: apareixia material mèdic al camp de batalla sota les municions, i gran part de la roba per als llits i per als soldats acabava als basars de la ciutat (Small, 2017: 23-24).

Va establir la vigilància i l'atenció nocturna dels malalts en torns, molts dels quals els feia ella personalment: d'aquí la llegenda de la «Dama del llum». Va organitzar un sistema d'enviament de cartes i diners dels soldats cap a casa, una escola i sales de lectura i entreteniment. Va aconseguir que una comissió sanitària enviada des de Londres ordenés construir un sistema de clavegueram. Primer a Scutari, i després als hospitals de Crimea i Koulali. I mentrestant, ho documentava tot.

Abans de caure malalta a Crimea Florence ja era una llegenda: les taxes de mortalitat a l'hospital es van reduir del 60 % al 42,6 % en el primer any de la seva estada allà, i fins al 2 % abans d'acabar la guerra. La mateixa reina Victòria li va fer arribar un fermall amb la Creu de Sant Jordi amb el seu agraïment.

Va ser l'última d'abandonar els hospitals militars al final de la guerra, el 1856.

### La guerra amb l'Administració

Florence era una heroïna nacional en tornar a Anglaterra. Els seus seguidors havien recollit una quantitat important de diners que es van invertir en la creació de la Fundació Nightingale. Va refusar qualsevol reconeixement públic, però va aprofitar el seu poder de convocatòria i l'interès que tenia en ella la Reina per promoure una Comissió Reial que investigués a fons el treball dels hospitals militars durant la guerra. Dels 20.000 soldats morts, 4.000 van morir al camp de batalla i 16.000 per malalties.

Amb l'ajuda política de Sidney Herbert i la tècnica de William Farr (Stone, 2016), el millor estadístic del moment, Florence va sistematitzar i analitzar totes les dades que havia recollit i va generar un informe de gairebé 1.000 pàgines: «Notes sobre les qüestions relatives a la salut, eficàcia i administració hospitalària de l'exèrcit britànic» (Nightingale, 1858b). Hi va fer servir per primer cop el gràfic «Coxcomb», o «Diagrama de la Rosa» (fig. 1), basat en els treballs de gràfics estadístics de William Playfair.<sup>11</sup> Era conscient que els qui havien de prendre les decisions de reforma que perseguia no podrien interpretar els milers de dades, taules i càlculs que presentava i que calia fer-los-hi entendre de manera visual.

Hi va afegir un estudi comparatiu entre la mortalitat entre civils i militars en temps de pau (Nightingale, 1858a) que demostrava que les morts militars eren més del doble (Kopf, 1917: 389), i causes per malalties *evitables*.

Malgrat que les autoritats van censurar gran part de l'informe,<sup>12</sup> va servir per a iniciar una reforma profunda a l'exèrcit: el 1860 es va crear la primera Escola de Medicina Militar del Regne Unit, a Fort Pitt.

11. William Playfair (1801-1850), enginyer i economista polític escocès, pioner en l'ús de gràfics lineals per mostrar sèries temporals i a qui s'atribueixen els primers gràfics circulars, de sectors i de barres.

12. La indignació de Florence en veure retallat el seu informe va ser tan gran que va utilitzar la seva amistat amb Henriette Martineau, sociòloga, estadística, escriptora i periodista, per divulgar les seves conclusions de manera «no oficial», atès que l'informe era confidencial (Veysel, 2016: 2055). També en va fer arribar còpies a Edwin Chadwick i a la novel·lista Elizabeth Gaskell.

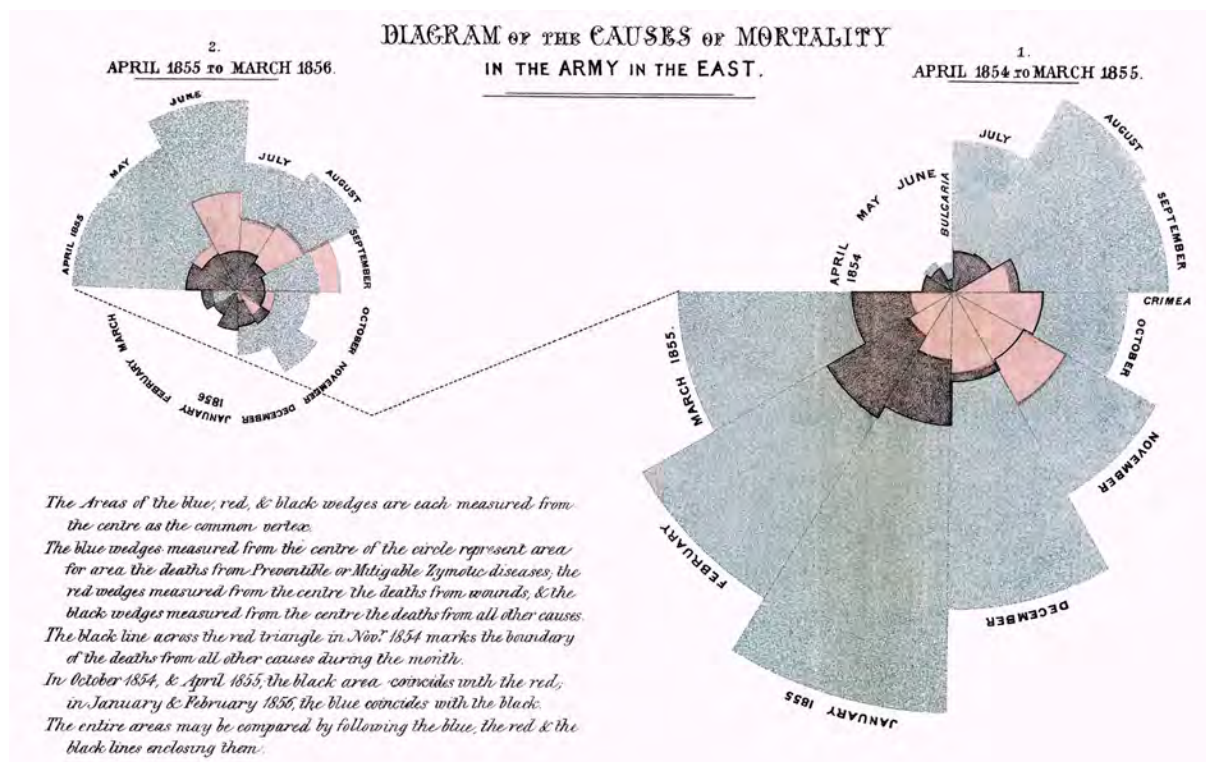


FIGURA 1. Diagrama de la Rosa o Coxcomb. Causes de la mortalitat a l'Exèrcit de l'Est

### La millora de la sanitat pública

Florence, com pretenia, va contribuir a la millora de la sanitat pública a gran escala. El 1858 es va llegir a la reunió anual del Congrés de Ciències Socials a Londres el seu estudi *Notes on Hospitals*, publicat l'any següent, sobre la construcció d'hospitals i la seva incidència en la cura dels malalts (fig. 2). El disseny d'hospitals com el Johns Hopkins de Baltimore, el Birkenhead, la Infermeria d'Edimburg o l'Hospital General de Madràs van ser supervisats personalment per ella (McDonald, 2010: 178-179).

Va activar una segona Comissió Reial de Sanitat el 1858, per millorar les condicions de la sanitat militar a l'Índia. Va crear i enviar formularis estandarditzats que li van permetre estudiar la distribució de la propietat de les terres, sistemes de reg, patrons de malalties i desnutrició, el sistema de castes, la posició de la dona i d'altres. Va publicar *How People May Live and Not Die in India* el 1863, que va portar a unes reformes massives en l'Administració. La mortalitat entre els soldats a l'Índia va disminuir dels 69 als 19 per cada mil.

En analitzar el cens de 1851 va detectar que dos terços de les infermeres britàniques treballaven en cases particulars, i que més de la meitat tenien menys de 19 anys i cap formació.

El 1859 va publicar el llibre *Notes on Nursing*, del qual es van vendre més de 15.000 còpies en dos mesos. Era un manual pràctic per aplicar les mateixes millores en l'atenció domiciliària que es van introduir als hospitals de Crimea: higiene, aire fresc, calor, silenci i dieta adient. Al Congrés Nacional d'Estadística, l'any següent, va presentar –i es va aprovar– un format o formulari estadístic estandarditzat, per al seu ús tant als futurs hospitals com als ja existents, que comprenia una nomenclatura per a les malalties i la sistematització de la recollida de dades (mortalitat relativa, estudi segmentat per edats, freqüència d'aparició de determinades malalties i d'altres) (McDonald, 2001: 68). Es considera l'origen de la vigilància epidemiològica.





FIGURA 2. Florence Nightingale el 1858

A la legislació derivada de la segona Comissió Reial de Sanitat, del 1971, s'inclouen les seves recomanacions relatives a la necessitat de reformar el clavegueram de les ciutats i ventilar les canonades, per evitar la propagació de plagues, no només en les noves construccions sinó també a les ja existents. La fita política assolida era impensable per a una dona.

Només després va reprendre l'interès per l'Escola d'Infermeria Nightingale, que funcionava des de 1860. El 1887 ja hi havia 550 infermeres Nightingale, 42 al capdavant d'hospitals de primera. Lluny del control aclaparador al qual sotmetia les infermeres de Crimea, Florence va instaurar un sistema d'apoderament de les alumnes, l'evolució de les quals seguia a través de formularis i exàmens estandarditzats.

El 1868 publica *Introductory Notes on Lying-in Institutions*, amb consells sobre l'atenció obstètrica (Stone, 1997: 37) després d'analitzar les dades de mortalitat durant els parts als hospitals. La incidència de les febres puerperals (fins al 1902 no identificades amb els estreptococs) matava 33 dones de cada 1.000 que parien als hospitals, per 5 de cada mil que parien a casa.

### **Altres aportacions**

Els treballs de Florence Nightingale són tan extensos que encara avui s'està tractant de recollir-los i endreçar-los. Va deixar nombrosos estudis sobre educació, especialment per a les nenes, molts recollits a la seva obra *Cassandra*. Estudis estadístics sobre la incidència de la prostitució en el propagament de la sífilis, recomanacions sobre el tractament de ferits a la Guerra de Secessió americana, in-

formes per a l'Exèrcit Britànic al Canadà sobre transport sanitari, recomanacions al fundador de la Creu Roja, Henri Dunant (Macho, 2017: 101),<sup>13</sup> i un llarg etcètera.

### La desaparició

Florence va fugir de tot protagonisme o vida pública. Entre 1857 i 1872 va estar malalta i tancada en una habitació, des d'on mantenia correspondència i redactava els seus estudis. Gairebé no acceptava rebre visites, només les relacionades amb la seva feina. Posteriorment feu algunes visites familiars i a l'Escola d'Infermeria. Va morir el 1910 als 90 anys d'edat.

### L'estadística

Florence Nightingale era una dona profundament religiosa. Concebia l'estadística com l'única manera d'arribar a entendre les lleis de Déu, cosa que permetria als homes intervenir-hi per millorar el món (McDonald, 1998: 267). Va entendre que només estudiant globalment els esdeveniments es podria esbrinar quina era la pauta general, no esbiaixada pels casos particulars i alterada per la variabilitat, trobar-ne la causa i actuar per millorar-la.

Florence no desenvolupava estudis estadístics amb un objectiu descriptiu, sinó per a utilitzar-los com una eina per prendre decisions, sempre orientada a la planificació social, i en concret a la salut pública (Small, 2017: 135). Des del primer treball en tornar de Crimea fins al darrer, a la dècada de 1890 amb l'anàlisi dels qüestionaris rebuts des de l'Índia, la recopilació de les dades i la seva sistematització va ser la part integral del mètode Nightingale.

Va comptar amb l'ajut de William Farr, metge i estadístic, i va creuar nombrosa correspondència amb el belga Lambert Adolphe Quetelet,<sup>14</sup> doctor en matemàtiques i fundador de l'Observatori Reial de Bèlgica, qui va instruir-la en estadística i la feina del qual va exercir una gran influència en Florence per la seva aplicació estadística a la sociologia (McDonald, 2010: 45).

Junt amb Francis Galton va intentar que es creés una càtedra específica d'estadística a la Universitat d'Oxford (Pearson, 1924: 424) i que es reformulés el cens general perquè pogués ser una eina útil (Díaz Reina, 2004: 51). No va aconseguir cap de les dues coses. Conscient de la complexitat de la matèria, va crear els seus diagrames, on va voler mostrar informació numèrica de manera entenedora que pogués servir per als seus objectius reformistes:

Aquests gràfics que realitzo són tan clars que els entenen fins i tot els metges, els generals i els membres del Parlament. (Narváez *et al.*, 2010: 302)

En reconeixement a la seva obra, van fer-la membre de la Statistical Society of England, un honor extraordinari especialment per a un membre del «sexe dèbil».

13. Henri Dunant, fundador de la Creu Roja, va dir en una visita a Londres el 1872: «Malgrat que soc conegut com el fundador de la Creu Roja i promotor de la Convenció de Ginebra, és a una dama que tot l'honor d'aquesta convenció és degut. El que em va portar a viatjar a Itàlia durant la guerra de 1859, va ser el treball de Miss Florence Nightingale a Crimea». Florence va ser membre del Comitè de Dames de la Creu Roja Britànica des de la seva fundació fins a la seva mort.

14. Astrònom, naturalista, matemàtic i sociòleg, format a la Universitat de Gant, conclouïa que el delicte era un fenomen social que es podia determinar estadísticament i que els factors que el provocaven eren el clima, la pobresa, la misèria i l'analfabetisme.

## Referències bibliogràfiques

- ATTEWELL, A. (1998), «Florence Nightingale (1820-1910)», *Perspectivas: revista trimestral de educación comparada*, XXVIII, marzo, 173-189.
- DÍAZ REINA, A. (2004), «Florencia Nightingale: Una pionera en Enfermería y... en Estadística Aplicada», *Hygia*, 58, 50-54.
- GILL, G. (2005), *Nightingales, The extraordinary Up-bringing and Curious Life of Miss Florence Nightingale*, Nova York, RandomHouse.
- GOROSTIZA, J. R. (2014), «Edwin Chadwick, el movimiento británico de salud pública y el higienismo español», *Revista de Historia Industrial*, 55, año XXIII, 11-38.
- KOPF, E. (1916-1917), «Florence Nightingale as Statistician», *Publications of the American Statistical Association*, 15, 388-404.
- LIPSEY, S. (1993), «Mathematical Education in the Life of Florence Nightingale», *Newsletter of the Association for Women in Mathematics*, 23, 11-12.
- MACHO, M. (2017), «Matemáticas para entender los fenómenos sociales: los trabajos pioneros de Florence Nightingale», *Pensamiento Matemático*, 7, (1), 93-105.
- McDONALD, L. (1998), «Florence Nightingale: Passionate Statistician», *Journal of Holistic Nursing*, 16, (2), 267-77.
- McDONALD, L. (2001), «Florence Nightingale and the early origins of evidence-based nursing», *Evidence-Based Nursing*, 4, 68-69.
- McDONALD, L. (2010), *Florence Nightingale at first hand*, Cornwall, MPG Books Ltd.
- NARVÁEZ-TRAVERSO, A.; MARTÍNEZ-GALIANO, J.; PÉREZ-MARTÍN, B. (2010), «Revisitando a Florence Nightingale desde una perspectiva de género», *Index de Enfermería*, 19, 4, 299-302, [en línia] <[http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1132-12962010000300014&lng=es&tlng=es](http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1132-12962010000300014&lng=es&tlng=es)> [Darrer accés: 10/02/2018].
- NIGHTINGALE, F. (1858a), *Mortality of the British army, at home, at home and abroad, and during the Russian war, as compared with the mortality of the civil population in England* [anònim atribuït a Florence Nightingale], Londres, Harrison and sons.
- NIGHTINGALE, F. (1858b), *Notes on Matters affecting the Health, Efficiency and Hospital Administration of the British Army*, Londres, Harrison.
- PATERNOSTER, L. (2018), K. The Nightingale Society, [en línia] <<http://nightingalesociety.com/>> [Darrer accés: 12/02/2018].
- PEARSON, K. (1924), *Life, Letters and Labours of Francis Galton*, Cambridge, Cambridge University Press, 2, 416-424.
- SMALL, H. (2017), *A Brief History of Florence Nightingale: and Her Real Legacy, a Revolution in Public Health*, Londres, Hachette UK.
- STONE, R. (1997), *Some British Empiricists in the Social Sciences, 1650-1900*, Cambridge University Press, Cambridge; Nova York, NY.
- STONE, M. (2016), «Nightingale, Florence», *Encyclopedia of Mathematics*, [en línia] <[http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Nightingale,\\_Florence&oldid=39241](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Nightingale,_Florence&oldid=39241)> [Darrer accés: 02/02/2018].
- VEYSEY, I. (2016), «A statistical campaign: Florence Nightingale and Harriet Martineau's *England and her Soldiers*», *Science Museums and Research*, 9, 2054-5570.





## CLOTILDE CERDÀ (1861-1926) I ELS ORÍGENS DE L'ENSENYAMENT PROFESSIONAL PER A DONES A CATALUNYA<sup>1</sup>

**ANTONI ROCA ROSELL**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA / INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS.

Paraules clau: *ensenyament tècnic per a dones, Clotilde Cerdà, Escola d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Barcelona, Catalunya, segle XIX*

### **Clotilde Cerdà (1861-1926) and the Origin of Vocational Education for Women in Catalonia**

*Summary: The small daughter of Ildefons Cerdà, Clotilde, became an internationally renowned music player, after her release at the 1873 Universal Exhibition in Vienna. Her harp talent was recognized very soon. Victor Hugo and some prominent Spanish intellectuals proposed that she adopt «Esmeralda Cervantes» as her artistic name. She performed concerts in many countries in Europe, Near East, a couple of tours in North and South America, etc. Her personal and artistic relevance was well-known and, probably thanks to this, about ten years ago, the Biblioteca Nacional de Catalunya acquired an Album of personal memories, which contains photographs, correspondence, and other objects that allow to deepen her personal and artistic trajectory. With this new documentary element, Isabel Segura has recently published a biography of Clotilde Cerdà. One of the elements that stand out in the activity of Clotilde Cerdà is to have organized an Academy of Sciences, Arts and Crafts for Women that was running for less than two years, between 1885 and 1887. It involved very prominent people of their time, such as Dolors Aleu, the pioneer woman doctor, but it did not get the necessary support to continue. One relevant element in the activities of the Academy is the close commitment of the School of Industrial Engineering of Barcelona.*

Key words: *vocational Education for Women, Clotilde Cerdà, School of Industrial Engineering of Barcelona, Barcelona, Catalonia, 19th century*

---

1. Aquesta comunicació forma part d'una recerca en curs prevista dins del HAR2016-75871-R del Ministeri d'Economia i Competitivitat, que inclou una secció sobre enginyeria i gènere.

## Introducció

L'ensenyament científic i tècnic per a les dones torna a ser un objecte de recerca molt destacat, després d'uns esforços molt interessants en les darreres dècades.<sup>2</sup> Ens volem centrar en el cas català, on no hi hagué dones titulades en enginyeria i arquitectura fins després de la Guerra Civil de 1936-1939. L'enginyeria, però, no és només un títol, és una activitat de disseny i construcció, sempre vinculada a l'ensenyament i a la transmissió de coneixement.

En aquest sentit, si volem analitzar la contribució de les dones a la tècnica, el camp de recerca és molt ampli, haurem de revisar molts aspectes de la vida social i productiva.

Hem de recordar que el 1910 a Espanya es reconegué l'accés de les dones a l'ensenyament superior, tot i que feia unes dècades que havien aconseguit títols universitaris.<sup>3</sup> En aquesta comunicació volem oferir uns primers elements sobre una entitat d'ensenyament femení creada el 1885, poc coneguda fins fa poc temps, deguda a la iniciativa de Clotilde Cerdà.

## Qui fou Clotilde Cerdà?

Clotilde Cerdà i Bosch (1861-1926)<sup>4</sup> era la filla petita d'Ildefons Cerdà (1815-1876),<sup>5</sup> el cèlebre enginyer autor del projecte d'Eixample de Barcelona i un dels pioners de l'urbanisme.<sup>6</sup> Els biògrafs de Cerdà han fet notar que Clotilde probablement no era filla natural seva, tot i que l'enginyer li donà el seu cognom. Com a resultat de tot plegat, es produí la separació de fet entre Ildefons i la seva dona, la pintora Clotilde Bosch i Carbonell (1829-1890). Ella i la seva filla s'instal·laren el 1864 a Madrid i, després, a Roma i a París. Clotilde mare veia que la seva filla tenia talent artístic, prengué classes de pintura, però finalment esdevingué una arpista de renom internacional.<sup>7</sup>

Amb 12 anys, Clotilde debutà el 1873 a Viena, en un concert dins un acte en commemoració de la mort de Cervantes organitzat per la comissió espanyola de l'Exposició de Viena que s'inaugurà pocs dies després. A continuació, adoptà el nom artístic d'Esmeralda Cervantes.<sup>8</sup> L'èxit de Clotilde fou fulgurant: a més de concerts per Europa, el 1875-1876 va fer la seva primera gira americana, amb concerts i actes a Llatinoamèrica i als Estats Units.<sup>9</sup>

La mare de Clotilde va esdevenir dama d'honor de la reina Isabel II, a l'exili des de 1868, amb el desencadenament del procés revolucionari a Espanya. Això vol dir, per exemple, que mare i filla van viure el setge de París durant la Comuna (1870). La vinculació amb l'exreina d'Espanya potser explica les relacions de Clotilde Cerdà amb les famílies reials portuguesa i brasilera. Val a dir que Clotilde s'integrà aviat en l'elit espanyola, principalment entre artistes i escriptors. Al mateix temps, Clotilde fou una dona compromesa amb campanyes humanitàries com la de l'abolició de l'esclavitud o la de

2. Canel et al. (2003); Jaffé (2003); Bix (2013).

3. Vegeu el treball pioner de Flecha (1996) i l'estudi sobre les investigadores a l'Institut Rockefeller de Madrid, de Magallón (1998).

4. Segura (2013); Ávila Peña (2016).

5. Un germà menor, nascut el 1862, no sobrevisqué.

6. Sobre Cerdà vegeu, entre molts altres, les contribucions a *Cerdà, un pasado con futuro* (1974), la biografia més estesa d'Estapé (2001) o anàlisis com el de Soria y Puig (1979).

7. Clotilde realitzà la seva formació musical a Roma, París i Viena.

8. Segons *La Llumanera de Nova York* fou Alfons de Borbó qui suggerí que se la conegués com a «Cervantes». Víctor Hugo hi afegí el nom d'«Esmeralda», nom de la gitana de la seva novel·la *Notre-Dame de París*. Altres deien que havia estat l'exreina, Isabel de Borbó, qui havia suggerit Cervantes. Segura (2013); Ávila Peña (2016).

9. Com recull Ávila Peña (2016), al llarg de la seva vida Clotilde realitzà sis gires per Amèrica.

la pena de mort. Li van dir, segons *La Ilustración* del 6 de juliol de 1884, «el Ángel de la Caridad». Sembla que va pertànyer a la maçoneria des de 1879, un corrent de tradició molt masculina, però en el qual estaven integrant-se dones.<sup>10</sup>

El 1999, la Biblioteca Nacional de Catalunya va adquirir un àlbum que havia pertangut a Clotilde de Cerdà a Wieland Führ, Kunsthandlung & Antiquariat, que té 76 fulls amb uns 362 documents: fotografies, retalls de premsa, correspondència, programes, diplomes, etc., que permeten aprofundir sobre la seva figura. La restauració es va completar el 2012, amb una exposició de la qual s'ofereixen elements al web de la Biblioteca.<sup>11</sup> Isabel Segura va publicar el 2013 una nova biografia on es recullen aquests nous elements i on s'ofereix una nova imatge de Clotilde Cerdà i la seva trajectòria.<sup>12</sup> Recentment, l'arpista Zoraida Ávila Peña ha dedicat la seva tesi doctoral a la trajectòria de Clotilde Cerdà, on aplega nous documents i rescata algunes de les seves composicions.<sup>13</sup>

### L'Acadèmia de Ciències, Arts i Oficis per a la Dona, Barcelona 1885-1887

A *La Vanguardia* del 7 de gener de 1883<sup>14</sup> es reproduïxen dues notes (sense signatura) que aparegueren a la premsa de Madrid (a *El Correo*)<sup>15</sup> sobre un projecte de Clotilde Cerdà per a crear una institució d'educació femenina (artisticoliberal) a Madrid. Segons es diu, «dos o tres anys» abans Clotilde havia convocat una reunió en la qual els assistents van estar d'acord que formar les dones seria «una vertadera revolució en el mode de ser de moltes de les nostres indústries i manufactures». Diu la nota que s'hauria de denominar: «Academia especial de Bellas Artes o artístico-industrial para la enseñanza de la mujer». Recordem que l'adjectiu «especial» es feia servir per a les escoles d'enginyeria. Segons es diu, l'Acadèmia beneficiaria les noies de bona situació, perquè preveïessin «canvis de fortuna» tenint algun ofici, i també les noies de «classe obrera i mitjana», per a assegurar-se el futur, les primeres, i per a estendre «els seus comerços i manufactures», les segones. Clotilde Cerdà, que anomenen Esmeralda Cervantes, ha preparat el seu projecte després d'observar les experiències a diversos països, principalment als centres industrials dels Estats Units, Anglaterra i Alemanya. Quins ensenyaments creien necessaris? Pensaven (p. 140) en els ensenyaments derivats de l'escultura i la pintura amb aplicació a la indústria: modelat amb fang, cera, fusta, marbre; pintura a l'oli, al fresc, a l'aquarel·la; sobre porcellana, cristall, seda, fang, fusta i marfil; brodats; el gravat en tots els seus procediments; nocions de física i química aplicades a la indústria; composició de clixés fototipogràfics; telegrafia, idiomes, tenidoria de llibres, ornamentació de mobles... Havien de comptar amb els millors professors, amb classes diürnes i nocturnes. La directora seria «la senyoreta Cervantes». Les alumnes pagarien una matrícula assequible, però el finançament havia de comptar amb donacions particulars. En la nota es menciona que a Madrid hi ha una escola d'institutrius, però s'afirma que a Espanya aquestes professionals no estan ben acceptades. Finalment, sembla que el projecte d'Acadèmia no quallà a Madrid.

10. Sembla que fou la filla d'Anselm Clavé, Aurea Rosa Clavé de Ferrer (1856-1940), qui la va introduir a la lògia Lealtad, en la qual ella havia ingressat el 1879. Ávila Peña (2016).

11. <<http://www.bnc.cat/Visita-ns/Exposicions/Esmeralda-Cervantes-la-restauracio-del-seu-Album>>

12. Segura (2013).

13. Ávila Peña (2016).

14. «Educación artístico-industrial de la mujer», *La Vanguardia*, 7 de gener 1883, 139-141.

15. No hem identificat aquesta publicació.

El 1884 Clotilde Cerdà s'instal·là a Barcelona i de seguida inicià les gestions per a crear l'Acadèmia. El 7 de març de 1885, signant com a Esmeralda Cervantes, aparegué un article al diari barceloní *La Dinastía*, on explica els detalls del seu projecte, afirmant, ara, que Barcelona és la ciutat d'Espanya on més s'han desenvolupat les arts i les indústries i, per tant, on les dones poden tenir més oportunitats.<sup>16</sup>

A *La Vanguardia* del 27 d'abril de 1885 es diu:

Las distinguidas señoras dona Esmeralda Cervantes, doctora Aleu, doña Antonia Opisso, doña Carolina Thos y señora Abad de Mas, organizadoras de la «Academia de Artes, Ciencias y Oficios» para la instrucción de la mujer, visitaron anteayer á las autoridades para que asistan á la inauguración de dicho Centro, cuyo acto se celebrará el 2 del próximo mayo, á las 5 de la tarde, en su local Rambla de Canaletas, 10. Los Excmos, señores Capitán general, Gobernador civil, presidente de la Audiencia y Alcalde constitucional, aceptaron gustosísimos la presidencia de la fiesta, prometiendo asistir al acto.

Efectivament, la inauguració tingué lloc el 2 de maig de 1885, amb discursos a càrrec de la directora i fundadora, Clotilde Cerdà, la professora Dolors Aleu, la secretària de l'Acadèmia, Antònia Opisso, i el professor Frederic Soler. No hi assistí, finalment, cap de les autoritats. L'acte tingué lloc als locals que havien llogat, a la rambla de Canaletes, 10, cantonada amb la plaça Catalunya (fig. 1).

En el seu discurs, Clotilde Cerdà explicà els objectius de la nova Acadèmia:<sup>17</sup>

Nuestra única ambición al fundar esta Academia es abrir Nuevos horizontes al porvenir de la Mujer española, la cual, reducida hoy a un círculo sumamente estrecho, no puede dedicarse más que a estudios tan incompletos como frívolos; nosotros, pues, nos proponemos ensanchar los límites de esa educación y, no lo dudéis, la Mujer española podrá colocarse al nivel de las más instruidas y adelantadas...

Clotilde Cerdà digué que havia consultat amb «eminentes» professors i tots havien acceptat de col·laborar i acabà demanant suport a la nova Acadèmia.

Després parlà Dolors Aleu (Barcelona, 1857-1913), una de les promotores amb Cerdà.<sup>18</sup> La seva intervenció se centrà en la necessitat d'educació i instrucció de les dones. La seva argumentació, com la de Cerdà, avui sona una mica carrinclona, quan reclama el protagonisme de les dones com a germanes, filles, esposes i bones mares... Tanmateix, segons Aleu, una dona ha de poder guanyar-se la vida: si no, com ho faria la que té un germà invàlid, un pare ancià, un marit malalt o uns fills sense pare...

Antònia Opisso (Tarragona, 1855 - Barcelona?, 1929), escriptora molt reconeguda, parlà de com s'havia organitzat l'Acadèmia. Segons ella, gràcies al talent de Clotilde Cerdà, tot s'havia resolt en un mes i mig. Concloué el seu parlament dient:

16. Cervantes, Esmeralda (1885), «Proyecto de fundación de una Academia de Bellas Artes y Oficios para la mujer», *La Dinastía*, 7 març 1885, 1468-1470. Aquest text fou resumit en extensió a *Industria e Invenciones*, tom III, núm. 67, 11 abril 1885, 401.

17. La crònica i els parlaments de la sessió inaugural foren reproduïts al primer número de la revista de l'Acadèmia, *El Ángel del Hogar*, de la qual només coneixem dos números (1 i 7), conservats a la Biblioteca de Catalunya.

18. Sobre Dolors Aleu, una de les primeres metgesses a Espanya, vegeu Flecha (1996).

Tal es, señores, el solo fin a que aspira nuestra Academia. Hacer mujeres útiles a la familia y a la sociedad, dignificarlas por medio de la práctica de la virtud del trabajo proporcionando por sus enseñanzas seguro porvenir a cuantas las hayan menester, y sin embargo tan noble propósito ha sido torcidamente interpretado por los que miran como una amenaza o peligro lo que tiende a separarse de añejas y rutinarias fórmulas que se oponen constantemente a la marcha progresiva de nuestros días. Y al decir marcha progresiva de nuestros días (ya que es preciso definir el verdadero sentido de las palabras) no he querido significar que anhelamos para la Mujer una educación que debilite en su alma el sentimiento moral; muy al contrario, reconocido el Cristianismo como base fundamental de la civilización, su esencia se difunde siempre en todo lo grande, en todo lo sublime, en todo lo que sea perfecto.

Cal notar que Antònia Opisso vol aclarir que una dona independent i instruïda no és una persona immoral, i assenyalava el cristianisme com la «base fonamental» de la civilització i, per tant, del seu projecte.

També parlà Frederic Soler i Hubert (1839-1895), conegut autor teatral amb el seu sobrenom, Serafí Pitarrà, que fou el professor de literatura catalana de l'Acadèmia. Afirmà que s'expressava en català no solament per la seva funció sinó perquè Clotilde Cerdà li ho havia demanat. I digué:

La dona pera posarse al nivell del home en lo que's refereix al treball, ha de instruirse en las mateixes carreres y arts en que s'instrueix l'home. // La Música, la Pintura, la Escultura, lo Cálcul Mercantil... tot, tot en una paraula deu ser objecte de sa educació pera donarli l'estat de independència y dignitat que tot home civilisat y digne li desitja. // A objecte tan noble tendeix la institució de l'Academia de Esmeralda Cervantes.

Al número 1 d'*El Ángel del Hogar* apareix un quadre de matèries i professors molt interessant. Estava previst ensenyar pintura, escultura, gravat, música, literatura, idiomes, cal·ligrafia, costura, fusteria, tall i confecció, planxat, però també química, física, història natural, dibuix, geometria, càlcul mercantil i tipografia. Com es pot veure, són aproximadament les mateixes matèries de les quals es parlava per a l'Acadèmia a Madrid, cosa que vol dir que això formava part del projecte de Clotilde Cerdà. Els directors de secció eren: Josepa Masanés de González, Dolors Aleu i Riera de Cuyás, Ramon de Manjarrés, J. Pellicer, Josep Masriera, Rosendo Novas i Joan Goula. Destaquem la presència de Ramon de Manjarrés, enginyer industrial de la promoció de 1869, que era el director de l'Escola d'Enginyeria Industrial des de 1868 (i ho seria fins el 1891).<sup>19</sup> Entre els professors mencionem Salvador Draper, enginyer industrial de la promoció de 1874, i Carlos Comas y Miguel, pintor uruguaià, autor d'uns *Elements de geometria* (1884). També figura entre els professors de música Isaac Albéniz, tot i que pensem que és més una mostra de suport a la iniciativa que una participació efectiva en les activitats de l'Acadèmia.

Al número 7 (novembre 1885) d'*El Ángel del Hogar*<sup>20</sup> trobem un quadre de professors més significatiu que el que apareix al número 1 (fig. 2). L'Acadèmia estava organitzada per seccions. La prime-

19. Barca & Lusa (1995).

20. De la revista *El Ángel del Hogar* només d'hem localitzat dos números, l'1 (maig 1885) i el 7 (novembre 1885), a la Biblioteca de Catalunya. A l'*Àlbum* conservat a la mateixa biblioteca hi ha un suplement de la revista publicat el 1887 arran del tancament de l'Acadèmia.





FIGURA 1. Fotografia d'alumnes de l'Acadèmia en una classe de brodats. Ens sembla reconèixer Clotilde Cerdà a l'esquerra, amb un vestit negre. Font: Àlbum Esmeralda Cervantes, Biblioteca de Catalunya

ra que apareix és la «Secció industrial», dirigida per Manjarrés, amb professors de telegrafia i telefonia (Narcís Montserrat), sabateria a màquina (Vicent Trilla) i enquadernació (J. Garcia), a més de geometria (Comas), química i física aplicades a la indústria (Draper) i història natural i agricultura (A. Vila Nadal). Entre els noms que apareixen en el quadre de professors no podem deixar de mencionar el del metge Gaspar de Sentiñón (1840-1903), un dels organitzadors el 1870 del congrés fundacional de la Federació Regional Espanyola de l'Associació Internacional de Treballadors a Barcelona, primer congrés obrer a Espanya, on els historiadors hi veuen l'origen del pes de l'anarquisme en el moviment obrer espanyol. Una altra secció notable és la d'estudis superiors per a la carrera d'institutrius, dirigida per la poetessa tarragonina M. Josepa Massanés (1811- 1887), on es pretenia oferir una formació completa per a institutrius. Finalment, Dolors Aleu dirigia una secció d'higiene i medicina domèstica.

*El Àngel del Hogar* publicà un suplement el 1887, on Clotilde Cerdà justifica el tancament de l'Acadèmia. Cerdà es queixa que les autoritats del Govern central, que havien promès suport, no l'havien acabat de donar. En els dos anys, havia ingressat 7.644 ptes. (3.087 de les matrícules i mensualitats de les aproximadament 300 alumnes) i havia gastat 20.604 ptes., és a dir, tenia un dèficit de 12.960 ptes., 9.210 de les quals les havia pagat de la seva butxaca. Cerdà agraeix els esforços de diverses persones, destacadament de l'industrial i financer Manuel Girona (1818-1905), i també de les autoritats locals, Ajuntament, Govern Civil i Diputació. Isabel Segura (2013) explica que aquesta manca de suport provenia de les accions de Clotilde per a diverses causes, en particular la denúncia de l'esclavitud a Cuba.<sup>21</sup>

21. Garcia (2010) suposa que l'Acadèmia fou abandonada el 1887 per Clotilde Cerdà, que és presentada com una mena de diva capritxosa, però que continuà funcionant, cosa que per desgràcia no es correspon a la realitat.



FIGURA 2. Quadre de professorat publicat a El Ángel del Hogar, núm 7, novembre 1885

**Continuïtat?**

L'experiència de l'Acadèmia de Barcelona pot semblar que s'hagués diluït després de 1887.

Tanmateix, és difícil no establir paral·lelismes amb l'Institut de Cultura i la Biblioteca Popular de la Dona que es creà (com a Biblioteca) el 1909.<sup>22</sup> Aquesta institució, sorgida de les classes benestants barcelonines (com l'Acadèmia), aconseguí una notable continuïtat fins a la Guerra Civil. Tot i l'orientació tan conservadora de les seves promotores (Francesca Bonnemaïson (1872-1949), vídua Verdaguier, la més destacada), el centre incorporà cursos professionals, com per exemple el de delineació. A més, també es creà una borsa de treball per a dones, on hi estaven apuntades unes 2.000.

L'Acadèmia «Esmeralda Cervantes», com també s'anomenà alguna vegada, pretengué oferir un ventall ampli de possibilitats de formació per a les dones, pensant a oferir oficis més competents a les dones treballadores i a donar dignitat a les dones benestants. En aquesta primera fase de la recerca ens ha sorprès el compromís del director de l'Escola d'Enginyers Industrials de Barcelona, Ramon de Manjarrés, una institució que va tenir un perfil allunyat de les dones fins a la dècada de 1940, quan es graduà la primera dona.<sup>23</sup>

Tanmateix, la documentació que hem aconseguit és encara limitada i no permet extraure més conclusions. Tot i això, l'Acadèmia de 1885 és, sens dubte, un pas pioner en l'establiment d'ensenyaments científics i tècnics per a les dones.

22. Segura (2010).

23. La primera graduada en Enginyeria Industrial a Barcelona, segona a Espanya, fou Isabel Trabal Tallada (1924-2014), que obtingué el seu títol el 1949.



## Referències bibliogràfiques

- ÁVILA PEÑA, Zoraida Isabel (2016), *Música, textos y filantropía en Esmeralda Cervantes: una arpista de la España romàntica*, Tesis doctoral, Madrid, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Geografía e Historia, Departamento de Musicología, 2016, [en línia] <<http://eprints.ucm.es/39368/>>
- BARCA SALOM, Francesc; LUSA MONFORTE, Guillermo (1995), «Ramon de Manjarrés i de Bofarull. La química agrícola i la professionalització dels enginyers industrials». A: CAMARASA, Josep M.; ROCA ROSELL, Antoni (dir.), *Ciència i tècnica als Països Catalans. Una aproximació biogràfica*, Barcelona, Fundació Catalana per a la Recerca, 381-423.
- BIX, Amy Sue (2013), *Girls Coming to Tech! A History of American Engineering Education for Women*, Cambridge, Massachusetts; London, England, The MIT Press.
- CANEL, Annie; OLDENZIEL, Ruth; ZACHMANN, Karin (ed.) (2003), *Crossing Boundaries, Building Bridges: comparing the history of women engineers, (1870s-1920s)*, Londres / Nova York, Routledge.
- «Cerdà: un pasado como futuro» (1974), *Cuadernos de arquitectura y urbanismo*, núm. 100, [en línia] <<http://www.raco.cat/index.php/CuadernosArquitecturaUrbanismo/issue/view/9027/showToc>>
- ESTAPÉ, Fabià (2001), *Vida y obra de Ildefonso Cerdá*, Barcelona, Península.
- FLECHA, Consuelo (1996), *Las primeras universitarias en España, 1872-1910*, Madrid, Narcea.
- GARCIA, Betsabé (2010), *Juguen dames: les primeres universitàries: Helena Maseras, Dolors Aleu i Martina Castells*, Barcelona, Ara Llibres.
- JAFFÉ, Deborah (2003), *Ingenious Women. From Tincture of Saffron to Flying Machines*, Sutton Publishing.
- MAGALLÓN PORTOLÉS, Carmen (1998), *Pioneras españolas en las ciencias: las mujeres del Instituto Nacional de Física y Química*, Madrid, CSIC.
- SEGURA SORIANO, Isabel (2010), *D'Institut a centre de cultura de dones: 1910-2010, centenari de l'Institut de Cultura i Biblioteca Popular de la Dona*, Barcelona, Centre de Cultura de Dones Francesca Bonnemaison.
- SEGURA SORIANO, Isabel (2013), *Els viatges de Clotilde Cerdà i Bosch*, Paterna, Tres i Quatre.
- SORIA Y PUIG, Arturo (1979), *Hacia un teoría general de la urbanización: introducción a la obra teórica de Ildefonso Cerdá: 1815-1876*, Madrid, Turner.

## MARIA GAETANA AGNESI. LA PRODIGI CONEGUDA PER BRUIXA

**ELISENDA CLÈRIES TARDÍO**

ENGINYERA SENSE ADSCRIPCIÓ PROFESSIONAL.

Paraules clau: *Agnesi, docència de les matemàtiques, la 'Versiera', Itàlia, segles XVII-XVIII*

### **Maria Gaetana Agnesi. The Child Prodigy Known as Witch**

*Summary: This current year marks the tercentennial of the linguist, philosopher and mathematician's birth, Maria Gaetana Agnesi. In her last educative stage, approximately around the twenties and early thirties she was instructed in calculus, algebra and geometry, or in other words, in the analytical mathematics of the moment. In her attempt to search for the truthful knowledge to explain the existence of God, she undertakes the goal of writing a summary of new findings and mathematical methods, the most appropriate and clarifying for those young students of this science. Therefore, she writes the 'Istituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana' published in 1748 that delights not only the scientific community (not just Italians) but also the powerful. In this article, some parts of Agnesi's work will be explained in a descriptive way, paying special attention to the curve who gives her the name nickname of «witch», la 'Versiera', which has created controversy when assessing the impact and importance of the author's work.*

Key words: *Agnesi, teaching mathematics, la 'Versiera', Italy, 17-18th centuries*

### **Introducció**

Enguany és el tricentenari del naixement de Maria Gaetana Agnesi, lingüista, filòsofa i matemàtica. En la seva última etapa educativa, aproximadament dels vint als trenta-quatre anys, va formar-se en càlcul, àlgebra i geometria, és a dir, en la matemàtica analítica del moment. En la cerca dels coneixements veritables per a explicar l'existència de Déu, decideix emprendre el projecte de redactar un compendi de les noves troballes i mètodes matemàtics, els més adients i clars per a la joventut estudiant d'aquesta ciència. És per això que escriu l'*Istituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana*, que publica el 1748 i que no deixa pas indiferents ni a la comunitat científica (no tan sols a la italiana) ni als poderosos. En aquest



FIGURA 1. Retrat de Maria Gaetana Agnesi

treball s'explicaran algunes parts de l'obra de manera descriptiva, fent especial menció a la corba que li dona el nom de bruixa, la *Versiera*, que ha creat controvèrsia a l'hora de valorar l'impacte i la importància que va tenir i ha tingut l'autora.

### **Maria Gaetana Agnesi**

Maria Gaetana Agnesi neix a Milà un 16 de maig de 1718, filla d'Anna Brivio i Pietro Agnesi, que havia fet diners gràcies a la seda (fig. 1). Milà és un dels focus de la península Itàlica del reformisme tant catòlic com polític de la Il·lustració. Es pot constatar pel fet que Maria Teresa d'Àustria, duquesa a Milà, integra la funció política de l'educació dels joves així com també el papa Benet XIV intentava trobar l'encaix entre el catolicisme ortodox i les noves troballes i revolucions científiques, i en menor mesura, l'apoderament de les dones en aquests camps.

Maria Gaetana Agnesi va ser la primera de vint-i-un germans, i per això el seu pare decideix instruir-la amb professors particulars. Pietro, que posseïa un dels salons amb més fama de la ciutat, organitzava debats i seminaris a casa seva amb figures italianes importants de l'època a fi que se sorprenguessin de la intel·ligència i la cultura de la noia, amb qui parlaven de conceptes filosòfics i matemàtics abstractes, sovint en llatí o en la llengua materna del convidat.

Agnesi comença a fer publicacions i a destacar en diferents camps des de ben jove: als nou anys va publicar un discurs en llatí en defensa de l'educació de la dona i als onze anys se la va conèixer com a l'«Oracle septilingüe» (Frisi, 1799: 14; Verdejo, 2017: 74). Als catorze anys resolva difícils problemes de geometria analítica i balística. Més tard, als disset anys, va escriure un comentari al *Traité analytique des section coniques* de l'Hôpital, però mai no va ser publicat tot i ser considerat excel·lent pels professors que el van examinar. Als vint anys va publicar *Propositiones Philosophicae*, un volum de 191 tesis que defensava en debats distribuïts en una sèrie d'articles que tractaven sobre la filosofia natural.

Després d'aquesta fase, Maria Gaetana expressa al seu pare el desig de dedicar la seva vida a les tasques caritatives, ja que odiava les reunions als salons. Però sota pressió del seu pare va decidir continuar amb l'estudi de les matemàtiques amb la tutoria del pare Ramiro Rampinelli (1697-1759), membre de l'orde benedictí olivetà.

El 1748 Agnesi va publicar la seva obra més important: *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, de dos volums, la qual la va fer famosa. Després de la mort del seu pare, el 1752, es va continuar dedicant a la feina caritativa, on se li van obrir les portes a l'Institut Pio Trivulzo, el qual va dirigir a partir del 1771 fins a la seva pròpia mort (Verdejo, 2017: 75). Estava tan dedicada a la cari-

tat que fins i tot quan la Universitat de Torí li va demanar el 1762 l'opinió sobre els estudis de Lagrange del càlcul de variacions ella va contestar dient que les matemàtiques ja no la concernien (Verdejo, 2017: 75). Finalment, Agnesi va morir el 9 de gener de 1799.

### **'Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana' (1748). Contingut de l'obra**

La primera paraula del títol, *Istituzioni*, del llatí *Institutiones*, vol dir 'principis elementals per a l'ensenyança de' (Truesdell, 1989: 124), cosa que ja explicita molt el seu contingut. L'obra conté 1.448 pàgines al llarg de quatre llibres i un prefaci que primer es dirigeix a la reina d'Àustria i després, al lector. Al final s'hi afegeixen més pàgines per a les figures i les errades.

Al prefaci, Maria Gaetana es dirigeix a la reina d'Àustria, i ho fa per tal que li publiqui el seu llibre, tot lloant la seva direcció al capdavant d'Àustria i intentant guanyar la seva empatia pel fet que totes dues són dones.

En la nota del prefaci al lector ella fa referència a la dificultat que tenen els joves per a entendre conceptes matemàtics difícils tot i la gran necessitat del seu estudi, posant-se a ella mateixa com a exemple, i al fet que la intenció de la seva publicació és facilitar el camí dels joves en els estudis de la matemàtica. Dona les gràcies al seu tutor, Ramiro Rampinelli, per haver-li facilitat el camí i explica que tot i l'existència de llibres de docència com ara l'*Analyse démontrée*, del reconegut pare Reyneau, cal renovar el material i la disposició del material en un context de constants renovacions científiques. La dificultat rau a trobar el que està dotat de la necessària claredat i simplicitat.

Per tant, l'autora és conscient que viu en una època revolucionària quant a l'anàlisi: recalca la necessitat del seu estudi. També és conscient de la poca homogeneïtat dels nous coneixements analítics a Itàlia i que els materials rellevants estaven repartits en llibres de diversos autors i en diaris. Per això utilitza els termes cartesianes: *chiarezza e metodo* (claredat i mètode), fa una síntesi del que existeix a la cerca del que és útil (*ridurre a metodo*) i necessari en un ordre natural (Minonzio, 2006: 65). El seu interès didàctic és el que la guia per seleccionar el material i definir un estil i una terminologia apropiats. El seu estil és clar i directe (Mazzotti, 2001: 674).

Tot seguit relata que en el primer volum s'utilitzaran diversos mètodes, els quals potser seran semblants a mètodes ja existents, o en seran extensions, però sense pretensió de ser innovador ni de ser una invenció: el llibre li farà el pes que vulgui, al lector, però ella només intenta modernitzar altres llibres de docència. Al segon volum sí que pretén introduir el càlcul integral per un mètode nou de polinomis, de Jacopo Riccati. Finalment, revela que ho vol fer en itàlia per propi divertiment i per a entregar-ho al públic italià. però sembla que hi ha una motivació més profunda (Minonzio, 2006: 67-69), ja que el llatí continua sent la llengua vehicular per a les ciències durant el segle XVIII, i hi té una posició forta. Des d'una visió lingüística, l'*Istituzioni* és una obra fora de l'ordinari en el propi context històric. I és que, segons Mazzotti (2001: 675), Agnesi proveeix de la primera presentació del càlcul en terminologia italiana. Quan fa referència a l'italià, es refereix al «toscà purificat», no al seu dialecte natiu, el milanès (Truesdell, 1989: 125).

Els quatre llibres es distribueixen en dos volums (o toms) en el primer dels quals, de 428 pàgines, s'hi troba el Llibre I, que tracta sobre l'anàlisi de la quantitat finita, i en el segon, de 1.020 pàgines, s'hi troben els Llibres II, III i IV, que tracten sobre el càlcul diferencial, el càlcul integral i el mètode invers de la tangent, respectivament.

Havent treballat diferents apartats del llibre, es pot comprovar que la manera de procedir i d'explicar d'Agnesi és majoritàriament a través d'exemples, fins i tot per a explicar un concepte. A més,

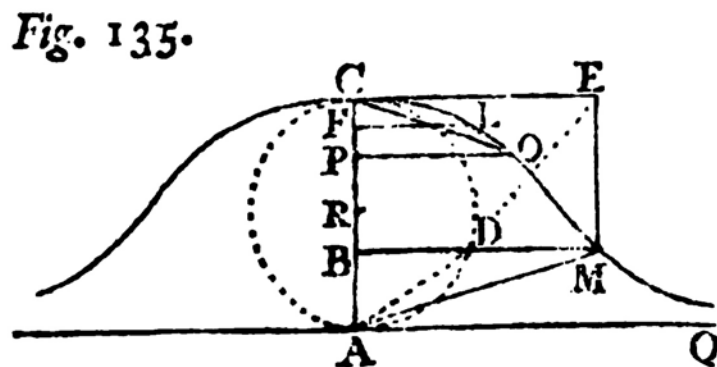


FIGURA 2. La Versiera

sovint posa èmfasi en el mètode de càlcul, sense entrar en profunditat en la comprensió abstracta del concepte. També va recopilant i recordant la informació que ja ha explicat anteriorment per tal que quedi tot clar i tancat i utilitza el procediment invers emprant un mateix exemple. A tall il·lustratiu, en el primer capítol del Llibre I, explica en el punt 19 com multiplicar quantitats compostes, i tot just als punts 25 i 26 explica dos mètodes per a trobar les arrels quadrades i cúbiques, respectivament.

### La 'Versiera'. Controvèrsia. Qui va parametritzar la corba?

D'aquest III Problema del Capítol V del Llibre I (punt 238) cal fer-ne especial esment perquè el nom d'Agnesi és conegut avui per molts matemàtics per estar vinculat a la corba anomenada la *Versiera* (fig. 2) en el folklore de les matemàtiques (Truesdell, 1989: 113). Popularment i erròniament, Agnesi és coneguda com la dona que va descobrir una corba cúbica (Findlen, 2010: 249).

Segons Loria (Loria, 1930) la corba, coneguda com a «bruixa d'Agnesi», va ser estudiada primer per Fermat, en el seu llibre, publicat el 1659, *De aequationum localium transmutatione et emendatione*; per Luigi Guido Grandi el 1703, a *Quadratura circuli et hyperbolae*, i finalment per Agnesi, el 1748.

Pel que fa a Fermat, al seu llibre (Fermat, 1659: 161-162, 233) no posa eixos en cap moment, per tant no pot trobar una parametrització de manera moderna en aquest context. Tot i així, Paradís i altres, en un estudi sobre el tractat de Fermat, afirmen que és aquest autor qui descobreix la corba (Paradís *et al.*, 2001: 20).

Quant a Grandi, si es va a l'obra original, *Quadratura circuli et hyperbolae* (Grandi, 1703-1710: 24-25), es pot comprovar que la fórmula i el mètode que hi apareixen no es corresponen al mètode d'Agnesi. Val a dir que Grandi va ser el primer en anomenar *Versoria* a la corba de la seva versió en llatí, paraula provinent de 'vertere' (girar, vessar) del llatí, i *Versiera* en la seva versió en italià, terme de naturalesa naval que identifica la corda que fa girar la vela (Truesdell, 1989). Finalment, el que expressa Agnesi a la seva obra sobre aquesta corba és el següent (Agnesi, 1748: 380-381):

238. Donat el semicercle ADC de diàmetre AC, si recerca el punt M tal que el segment MB normal al diàmetre AC que talla el cercle en D sigui la relació d'AB i BD la mateixa que AC a BM. Per satisfer el problema, es demana el lloc del punt M.

I posant nom a les diferents variables, aplicant una propietat del cercle i les condicions del problema troba l'equació de la corba descrita, que es diu la *Versiera*. I tot seguit posa diferents substitu-

cions per entendre aquesta corba. Ella explica les diferents substitucions amb paraules, i les comprova amb la figura geomètrica.

Així, a través d'aquest problema, parametriza la corba *Versiera*. Més endavant, en el punt 242 (Agnesi, 1748: 390) s'expressa que a partir de l'equació que s'ha obtingut amb la parametrització es trobarà el dibuix de la corba, és a dir, la construcció geomètrica de les diferents corbes, entre elles, la *Versiera*. Així doncs, l'originalitat recau en el procediment del tractament d'aquesta corba.

### Què té d'especial la 'Versiera'?

En haver vist aquest capítol en concret, venen diverses preguntes al cap: com és que tot i parametritzar cinc corbes de grau superior a dos és només aquesta la que es torna famosa? No pretenia innovar en cap d'elles, com explicava en la nota al lector (Agnesi, 1748: Prefaci):

S'utilitzaran diversos mètodes, els quals potser seran estesos o semblants a diverses coses, però sense pretensió de ser innovadors ni una invenció.

Agnesi afegeix l'article femení a la paraula que Grandi havia triat per a la corba i John Colson (1680-1760), professor lucasià de matemàtiques a Cambridge, en fer la seva traducció a l'anglès confon la paraula amb una abreviació d'*aversiera*, que significa 'bruixa' en italià. Bé pot ser aquest el motiu de la seva fama, o bé pot ser perquè l'obra d'Agnesi va tenir més abast que les anteriors esmentades.

Mazzotti (2001: 676) justifica el poc interès d'estudi de la corba en tractats anteriors perquè no havia pogut ser associada a cap aplicació mecànica o física rellevant. El seu interès requeria únicament en les seves propietats mètriques. Tot i així, actualment aquesta corba sí que té aplicacions.

Formalment, la corba és equivalent a la funció de densitat de probabilitat de la distribució de Cauchy (Stigler, 1974) i no es va identificar com a possible error de distribució fins al 1824, i quan apareix és per contraposar teoremes genèrics. A més, també té la seva importància en física, pel fet d'aproximar la distribució de l'energia espectral de les línies espectrals, en particular les línies de raigs-X (Spencer, 1940).

¿És en aquests dos últims fets que es recupera el nom d'Agnesi per a la corba? Segons Truesdell (1992) un article de l'*Oxford English Dictionary* en referència a la «bruixa d'Agnesi» atribueix el primer ús del terme «the witch of Agnesi» a un llibre de text britànic del 1875. ¿Potser va passar que les obres prèvies no van tenir l'impacte que va tenir l'*Instituzione analitiche* i és per això que el llibre de text de 1875 recupera el seu nom?

### Llegat

La seva obra *Instituzioni analitiche* té un significat històric remarcable: el llibre de text va tenir molt d'èxit i va mantenir-se com a referència estàndard a Itàlia fins a la segona meitat del segle XVIII (Mazzotti, 2001: 659). L'obra presentava algunes particularitats en el seu estil i contingut que l'han diferenciat de treballs comparables del mateix període (Mazzotti, 2001: 659).

De fet, la seva obra *Instituzioni analitiche* ha estat criticada per manca d'originalitat, i això s'ha argumentat amb aspectes inusuals del llibre que suposadament indiquen la seva manca de competència. Truesdell (1989: 132-135) fa notar que el seu llibre té característiques poc comunes i assenya-la una carta que Agnesi escriu a Jacopo Ricatti on ella afirma que no volia veure's involucrada en els afers de física, que volia evitar anar més enllà de la pura anàlisi. Això Mazzotti (2001: 678) ho argu-



menta dient que Agnesi creia que el camp de les matemàtiques (sobretot de la geometria) és l'únic camp en el qual amb l'intel·lecte humà es poden descobrir i contemplar les veritats a les quals s'arriba amb absoluta certesa, a diferència de la física. Tant Mazzotti (2001) com Roero (2015) consideren que és una decisió deliberada d'Agnesi la de no incloure'ls, ja que indica que era conscient que aquest tipus de problemes requeririen altres principis i mètodes.

Truesdell (1989: 132-135) considera que Agnesi tenia poca maduresa matemàtica l'any 1745 quan escrivia sobre el càlcul diferencial. Com a exemple, cita correspondència de Riccati i Agnesi i relata que ella ha de ser guiada i que és incapaç de posar alguna cosa en el seu llibre que no hagi estat abans verificada. Roero (2015: 307) discrepa i diu que Agnesi no es deixava aconsellar de manera passiva. De l'intercanvi de cartes es pot percebre que desitjava ampliar els seus horitzons i estudiar treballs que havien aparegut recentment en el domini públic. Ho reforça argumentant que quan J. Riccati va suggerir a Agnesi que publicués el mètode de Suzzi a la seva obra, ella va fer una demostració d'errors en el mètode, així que el tutor va repensar-s'hi perquè que no l'inclogués.

Quant a la integració del llibre III, Pepe (1981: 161-173) explica que la seva riquesa de casos acuradament seleccionats i acuradament exposats és sens dubte un dels mètodes més esplèndids del tractat d'Agnesi i recalca que es troba entre els millors tractats de matemàtiques que el segle XVIII ha deixat.

Quant al càlcul, s'estaven produint canvis majors quan Agnesi estava escrivint el seu llibre. Fins al 1730, era una pràctica habitual passar de la notació fluxional a la diferencial (segons si eren escoles newtonianes o leibnizianes). A partir del 1730, els dos vessants van divergir radicalment amb el resultat que la comunicació entre escoles era creixentment difícil.

El seu càlcul és de tradició leibniziana amb temes que ampliaven aquesta tradició, però emfatitza que el diferencial és el mateix que la fluxió newtoniana. En l'obra d'Agnesi s'uneixen aquests dos mètodes de càlcul per excel·lència: Newton i Leibniz; és un resum clar de l'estat de coneixement en la matemàtica analítica. L'objectiu de l'obra és donar un complet, integrat i entenedor tractament de l'àlgebra i també l'anàlisi de conceptes relativament nous de l'època. Agnesi no distingeix entre el concepte de diferència infinita i fluxió, deduït de l'Hôpital la definició però no les modalitats del seu ús.

### **Impacte internacional**

La bona posició del llibre d'Agnesi en les matemàtiques continentals és incrementada en el context del debat britànic sobre la naturalesa de l'àlgebra i els fonaments del càlcul (Mazzotti, 2001: 675). Els promotors de la traducció d'aquest llibre van ser Francis Maseres i John Hellins, que van veure el llibre a la introducció dels mètodes newtonians. De fet, en la traducció del llibre es va adaptar la notació i es van traduir els diferencials a fluxionals.

Per part de França, la rebuda que va tenir és el document de 1749 que conté la recomanació de l'Acadèmia de França per traduir el tractat agnesià, que va ser signat per Mairan i Da Montigny. I havent estat traduït, va ser presentat a l'Académie des Sciences a París. El 1775 una comissió de l'Académie va recomanar la traducció del segon volum d'Agnesi; el 1782 es va recomanar la seva lectura a l'escola militar de Brienne i el 1784, a Sorèze (Blanco, 2007: 218).

### **Honors**

El juny de 1748, Maria Gaetana Agnesi va enviar un esborrany del primer volum a Jacopo Bartolomeo Beccari (1682-1766), president de l'Acadèmia de Ciències de Bolonya, i dues setmanes més tard

va ser escollida com a membre (el quart membre femení) d'aquesta acadèmia (Findlen, 2010: 260); després de l'èxit de l'obra va ser nominada professora de matemàtiques de la Universitat de Bolonya, on figura com a membre del Dipartimento di Matematica del 1748 al 1796, amb una nota que indica que només va impartir docència el 1750 (Verdejo, 2017: 75).

Els honors i mencions de l'època fets per diferents matemàtics i historiadors són remarcables. El seu estil simple però alhora elegant d'escriure va guanyar-se l'estima dels seus professors i també dels nombrosos contemporanis, tant italians com estrangers: Étienne Montucla (1725-1799), De Brosses (1709-1777) i Frisi (1734-1817) en són diferents exemples.

Els matemàtics de la família Riccati li van dedicar estudis i la van citar en els seus apunts (Roero, 2015: 308). D'entre la correspondència que recull, se'n pot destacar que la família Riccati tenia en molt bona consideració Agnesi. Una cita de Giordano Riccati remarca la difusió de l'obra dient que està en mans de tothom i que ara el jovent estudia l'àlgebra amb l'obra d'Agnesi (Roero, 2015: 300-307). Vincenzo Riccati, va catalogar l'obra com una síntesi dels descobriments en anàlisi executats amb precisió del mètode, amb profunditat i claredat de doctrina. I està clar que li agradava, el text estava ple de les innovacions més interessants del seu pare Jacopo, de les intervencions silencioses del seu germà i també incloïa un petit tast del seu propi treball (Findlen, 2010: 262).

Un dels noms més il·lustres que han utilitzat l'*Instituzione analitiche* és Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), qui va mencionar l'obra en correspondència amb Giulio Carlo Fagnani i el 1755 l'utilitzava en les seves classes (Roero, 2015: 307). A més, ja el 1762, la Universitat de Torí li va demanar opinió sobre els últims articles del jove Lagrange sobre el càlcul de variacions (Verdejo, 2017: 75).

A més, cal esmentar els honors que va rebre per part del papa Benet XIV. Benet XIV (Prospero Lambertini, 1740-1758) tenia la reputació de ser un dels papes més cultes del segle XVIII, i donava suport a les dones científiques amb talent (Findlen, 2010: 263). Agnesi va rebre dues cartes per part d'ell, la primera, de 1749, és una felicitació juntament amb regals per la publicació del llibre, i en la segona, de 1750, el Papa li atorga la càtedra de matemàtiques i filosofia natural de la Universitat de Bolonya (Frisi, 1799: 49-52; Verdejo, 2017: 75).

## Conclusions

Tot i estar en un context clar de discriminació de gènere, on les matemàtiques estaven monopolitzades per les elits masculines, Maria Gaetana Agnesi aconsegueix fer-se un lloc en aquesta ciència. La decisió d'abandonar l'estudi està totalment condicionada per la seva condició de gènere, ja que no se sentia atreta per un món de luxes i privilegis i prefereix optar per dedicar-se a les cures, tasca que han assumit tradicionalment les dones.

L'obra *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* és un compendi de la matemàtica d'alt nivell coneguda fins aquell moment i es caracteritza per la seva organització i les clares explicacions dels conceptes i mètodes basats en exemples específics. La independència de pensament i judici és notable en Agnesi: l'organització del material i la selecció dels exemples més apropiats per a trobar mètodes indicats per a principiants, a més de tractar temes no resolts, entre d'altres. L'obra serveix per a popularitzar i apropar les matemàtiques a la joventut, tot sent conscient de la funció política que comporta, i per això l'escriu en italià i no pas en llatí, que hauria estat el més normal a l'època.



## Referències bibliogràfiques

- AGNESI, M. G. (1748), *Instituzione Analitiche ad uso della gioventù italiana*, 2 vol., Milà, Palazzo Agnesi.
- BLANCO, M. (2007), «Análisis comparativo de la comunicación del cálculo diferencial en el siglo XVIII: La educación militar en Francia y Prusia», *Llull*, 30, 217-218.
- FERMAT, P. (1659), *De aequationum localium transmutatione et emmendatione*, 161-162.
- FINDLEN, P. (2010), «Calculations of faith: mathematics, philosophy, and sancity in 18th century Italy (new work on Maria Gaetana Agnesi)», Stanford (USA), Energy Institute (Great Britain); Institute of Fuel (Great Britain), Elsevier, 249-291.
- FRISI, A. F. (1799), *Elogio Storico di Maria Gaetane Agnesi Milanese*, Milan, Giuseppe Galeazzi Stampatore e Librajo.
- GRANDI, G. (1703-1710), *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas & parabolae quadrabiles geometricae exhibita & demonstrata*.
- LORIA, G. (1930), «Versiera, visiera e pseudoversiera». A: *Curve piane speciali algebriche e trascendenti. Teoria e Storia*, vol. 1, libro II, 93-99, Milano, Ulrico Hoepli.
- MAZZOTTI, M. (2001), «Maria Gaetana Angesi. Mathematics and the making of the Catholic Enlightenment. Source», *Isis*, 92, (4), 657-683.
- MINONZIO, F. (2006), *Chiarezza e Metodo, L'indagine scientifica di Maria Gaetana Agnesi*, Milà, Lampi di Stampa.
- PARADÍS, J.; PLA, J.; VIADER, P. (2001), «Fermat's Treatise on quadrature: a new reading», *Journal of Economic Literature Classification: C00. MSC*, [en línia] <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.583.4720&rep=rep1&type=pdf>> [Darrer accés: 20/03/18].
- PEPE, L. (1981), «Sulla trattatistica del calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 161-173.
- ROERO, C. S. (2015), «M. G. Agnesi, R. Rampinelli and the Ricatti family: A cultural fellowship formed for an important scientific purpose, the Instituzione Analitiche», *Historia Mathematica*, 42, 296-314.
- SPENCER, R. C. (1940), «Prosperities of the Witch of Agnesi - Application to Fitting the Shapes of Spectral Lines», *Journal of the Optical Society of America*, 30, (9), 415-419,
- STIGLER, S. M. (1974), «Studies in the History of Probability and Statistics. XXXIII Cauchy and the Witch of Agnesi: An Historical Note on the Cauchy Distribution», *Biometrika*, 61, (2), 375-380.
- TRUESDELL, C. (1989), «Maria Gaetana Agnesi», *Archive for History of Exact Sciences*, 40, (2), 113-142.
- TRUESDELL, C. (1992), «Corrections and Additions for "Maria Gaetana Agnesi"», *Archive for History of Exact Sciences*, 43, 385.
- VERDEJO RODRÍGUEZ, A. (2017), *Mujeres matemáticas: las grandes desconocidas*, Vigo, Universidad de Vigo.

## ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DEL SIGLO XVIY SU APLICACIÓN AL AULA DE SECUNDARIA

**PEDRO JOSÉ HERRERO PIÑEYRO;<sup>1</sup> ANTONIO LINERO BAS;  
ANTONIO MELLADO ROMERO<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>IES RICARDO ORTEGA, FUENTE ÁLAMO (MURCIA) - [pjherrero22@gmail.com](mailto:pjherrero22@gmail.com).

<sup>2</sup>UNIVERSIDAD DE MURCIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS - [lineroba@um.es](mailto:lineroba@um.es).

<sup>3</sup>IES FRANCISCO SALZILLO, ALCANTARILLA (MURCIA) - [antonio.mellado2@um.es](mailto:antonio.mellado2@um.es).

Palabras clave: ecuaciones numéricas, siglo xvi, Cardano, Stevin, Chuquet

### **Some Methods of Numerical Resolution of Equations of the 16th Century and their Applications in the High School Classroom**

Summary: *In this note, we give a brief account on numerical methods developed at 16th century, focussing our attention on three works. The first one is 'L'arismethique nouvellement composee', by Estienne de la Roche, published in 1520. De la Roche took his method from the 'Triparty' of his master Nicolas Chuquet (who wrote it in the form of a manuscript lost until 1881). Secondly, we describe the «Regula Aurea» exposed by Girolamo Cardano in his celebrated 'Ars Magna', published in 1545. And finally, we analyse a method given by Simon Stevin in 1594, resembling the bisection process, in a pamphlet entitled 'Appendice Algébrique de Simon Stevin, de Bruges, contenant regle générale de toutes équations'. Taking into account the mentioned methods, and their history, we propose some activities to be developed in the High School mathematics classroom, so as to design the respective algorithms associated to the methods or to stress the importance of the so-called process of algebrization of the mathematics.*

Key words: numerical equations, 16th century, Cardano, Stevin, Chuquet

### **Introducción**

En el currículum de las matemáticas de secundaria y bachillerato encontramos la resolución de ecuaciones en esas etapas educativas (CARM, 2015). En particular, la resolución de ecuaciones polinómicas hace referencia, salvo casos especiales, a

las ecuaciones hasta el grado dos, que se resuelven por radicales, a las ecuaciones bicuadradas, que se reducen a cuadráticas mediante un cambio de variable, y a las de grado superior a dos, que se resuelven descomponiéndolas en factores de grado máximo dos. Las ecuaciones polinómicas se tienen que presentar a los alumnos «preparadas» para que se ajusten bien a los tipos mencionados antes. Esto produce en el alumno una visión de una matemática descontextualizada de la realidad.

La inclusión de métodos numéricos nos permitirá introducir ecuaciones polinómicas que no se pueden resolver mediante los métodos clásicos enseñados en secundaria y bachillerato y nos ayudará a mostrar a los alumnos una visión más realista de las matemáticas. Además, podremos abordar otros conceptos como el de aproximación de números reales o cálculo del error cometido en dicha aproximación, así como introducir las nuevas tecnologías en el aula mediante la programación de diferentes métodos numéricos.

Para llevar a cabo esta tarea, será fundamental realizar una elección adecuada de los métodos numéricos, mostrándolos contextualizados en su época. La historia de las matemáticas nos servirá como herramienta pedagógica que nos proporcionará un enriquecimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Fauvel & Maanen, 2000; Katz & Tzanakis, 2011), transmitiendo las matemáticas a los alumnos como una ciencia construida mediante un trabajo colectivo y en continua evolución (Massa, 2014). Además, el uso de fuentes originales nos servirá para contextualizar los métodos y para elaborar tareas divertidas, gratificantes y enriquecedoras, tanto para los profesores como para los alumnos (Katz & Tzanakis, 2011: cap. 1).

En el siglo XVI se produce en Europa un crecimiento considerable de textos impresos de álgebra que difunden el método algebraico para resolver problemas, acentuando la importancia de la resolución de una ecuación como último paso de dicho método. Se conocían los métodos de resolución por radicales de las ecuaciones hasta el grado cuatro, publicados por primera vez en 1545 por Cardano en su *Ars Magna*. Aparte de que no se conocía un método general para resolver ecuaciones de grado mayor que cuatro, la resolución por radicales se topaba con dos problemas: (1) en algunos casos de resolución de ecuaciones cúbicas, las llamadas cúbicas irreducibles, el proceso de resolución por radicales tropezaba con la extracción de raíces cuadradas de números negativos; (2) la complejidad de los métodos de extracción de raíces cuadradas y cúbicas hacía el proceso muy lento y pesado. Esto provocó, sobre todo a partir de la obra de Cardano, que gran parte de los textos de álgebra incluyeran un apartado dedicado a métodos de resolución numérica de ecuaciones. Métodos recogidos en las obras de Chuquet (1484), Pacioli (1494), Cardano (1545), Stevin (1585), Viète (1600), Pitiscus (1612) o Bürgi (1620) entre otros (Norgaard, 1922).

Entre estas obras, nos parecen relevantes para usar en el aula los métodos de Chuquet, Cardano y Stevin por diferentes razones: (1) las obras originales son fácilmente accesibles, (2) los métodos usados son sencillos, (3) son métodos programables mediante ordenador y (4) recorren el siglo XVI, lo que nos va a permitir incidir en la notación usada para expresar las ecuaciones y mostrar la evolución del lenguaje simbólico durante este siglo. Analizaremos estos tres métodos con el objetivo de acentuar las posibilidades de usarlos en el aula para introducir diferentes algoritmos de resolución numérica de ecuaciones y resaltar la importancia del lenguaje simbólico en las matemáticas.

### **El método de Chuquet**

Chuquet nació en París alrededor de 1450, estudió medicina y se trasladó a Lyon sobre 1480, donde trabajó como copista preparando documentos comerciales relacionados con las leyes. El talento de

Chuquet quedó plasmado en su trabajo con los nuevos numerales indo-arábigos y las herramientas de cálculo que proporcionaban (Flegg *et al.*, 1985).

Es conocido, sobre todo, por su libro *Triparty en la Science des Nombres* (Chuquet, 1484). Este trabajo no llegó a publicarse, y el manuscrito se perdió años más tarde. En 1881, Aristide Marre encuentra el manuscrito en la Biblioteca Nacional de París y realiza una edición en francés (Marre, 1880). Gran parte de los procedimientos algebraicos descritos por Chuquet en su *Triparty* se dieron a conocer en Europa a través de la obra *Larismethique nouvellement composee* publicada en 1520, y posteriormente en 1538, por Estienne de La Roche (1470-1530). En particular, el método de resolución numérica de ecuaciones que Chuquet describe en el *Triparty* será reproducido por La Roche en *Larismethique*, y por lo tanto se dará a conocer durante el siglo XVI. El método se basa en una regla, que Chuquet llama *regla de los números intermedios*, «La rgle des nombres moyens», para intercalar una fracción entre otras dos dadas. Chuquet enuncia la regla de la siguiente forma «Numerator avec numerateur se adioustent et denoiater avec denoiateur. Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouver le premier moyen» (Marre, 1880: 101). En notación moderna, la regla dice que si tenemos dos fracciones  $a/b < c/d$ , entonces  $(a+c)/(b+d)$  está comprendida entre ellas. Chuquet aplica entonces la regla de los números intermedios para obtener la solución de

$$x^2 + x = 39 \frac{13}{81}.^1$$

Damos un esquema del proceso de Chuquet para resolver la ecuación (fig. 1).

1. Se obtienen, por comprobación directa, dos valores, uno menor que la solución real y otro mayor. En este caso, 5 y 6.
2. Como la solución está entre 5 y 6, la regla de los números intermedios da  $11/2$  como primera aproximación.
3. El valor del paso anterior divide  $[5,6]$  en dos subintervalos, uno de los cuales contiene la solución. Sustituyendo en la ecuación el valor del paso 2, se averigua qué subintervalo contiene la solución. Volviendo de nuevo al paso 2, se consigue otra aproximación. Repitiendo el proceso, se llega a la solución exacta,  $52/9$ .

### El método de Cardano

Los trabajos de Cardano (1501-1576) tuvieron una gran influencia en las matemáticas de su época. Su obra más importante es *Artis magna, sive de regulis algebraicis* (1545), conocida como *Ars magna*. En ella, Cardano realiza una compilación de las técnicas conocidas para la resolución de ecuaciones polinómicas hasta el grado cuatro, estudia con detalle las ecuaciones y proporciona, por primera vez de manera impresa, las fórmulas por radicales para las ecuaciones de grados tres y cuatro.

En el capítulo XXX del *Ars Magna* da una regla general para resolver ecuaciones de forma numérica, que llamó *Regula Aurea* y que aplicó a las ecuaciones  $x^4 + 3x^2 = 100$ ,  $x^2 + 20 = 10x$ ,  $x^3 + 6x = 20$  y  $x^4 + 6x^2 + 200 = 10x^3 + 12x$ . Cardano ve esta regla como un método general, y así dice «ratio

---

1. Chuquet enuncia la ecuación de la siguiente forma «trouver vng nombre tel que multiplie en soy et a la multiplication adiouste cellui nombre tout monte  $39 \frac{13}{81}$ » (Marre 1880: 102).

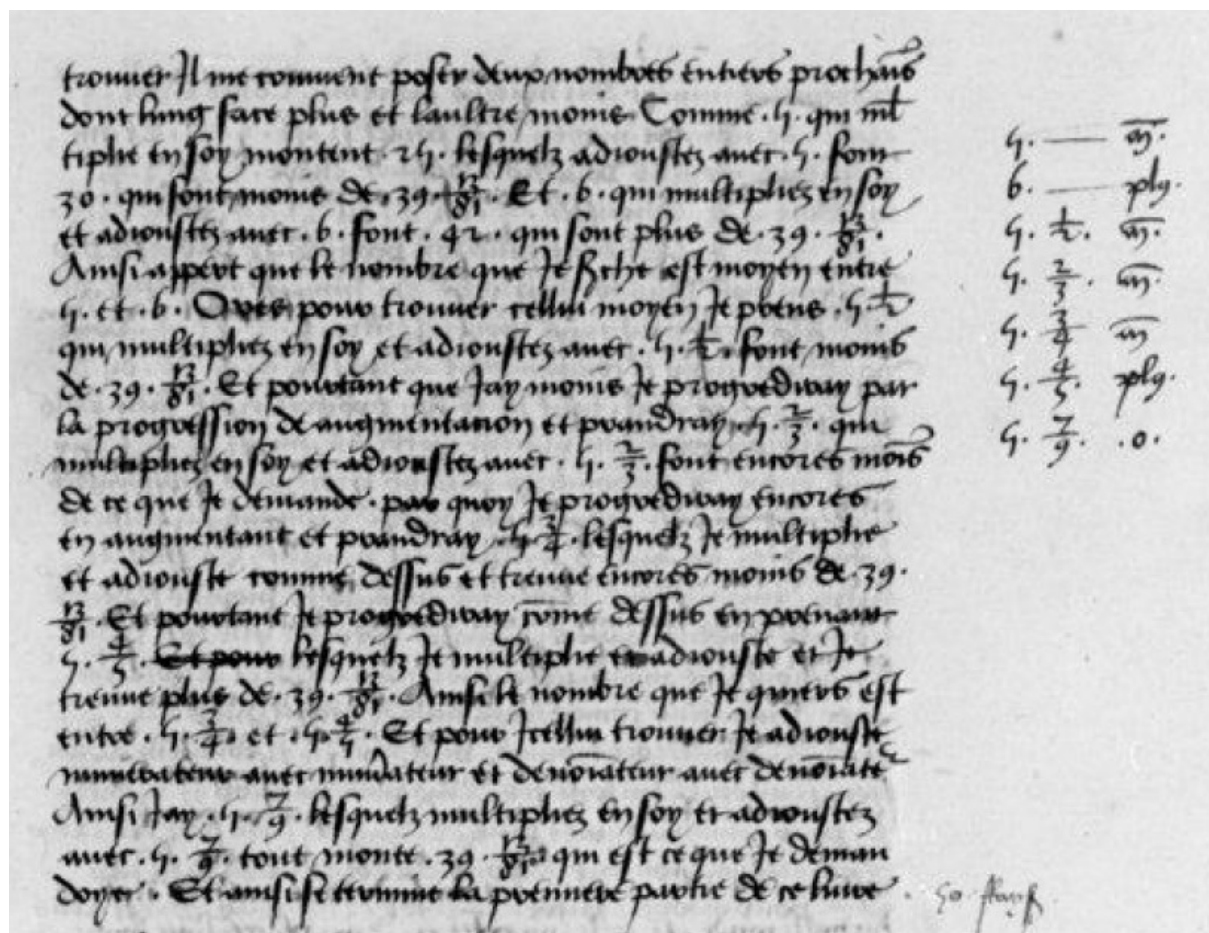


FIGURA. 1. La ecuación  $x^2 + x = 39 \frac{13}{81}$ , en *Le Triparty* (1484) de Chuquet

haec universalis est, nec indiget alia regula» (Este procedimiento es de aplicación universal, y no necesita de otra regla) (Cardano, 1545: fol. 53 bis).

Veamos cómo resolvió  $x^4 + 3x^2 = 100$ . Explicamos el método en notación actual y de forma resumida, la forma original se puede ver completa en la figura 2. Si  $P(x) = x^4 + 3x^2$ , la ecuación se expresa como  $P(x) = 100$ . Al aplicar la regla, es necesario conocer previamente dos aproximaciones de la solución, una por exceso y otra por defecto. Estas dos aproximaciones las obtiene por sustitución directa, en este caso son 2 y 3. Cardano considera como primera aproximación la obtenida por defecto, es decir,  $x_1 = 2$ . Ahora, si llamamos  $x_s \in [2,3]$  a la solución de la ecuación, y teniendo en cuenta que  $P(2) = 40$ ,  $P(3) = 162$ , igualando proporciones obtiene la siguiente aproximación:

$$\frac{x_s - 2}{3 - 2} \approx \frac{100 - 40}{162 - 40} \Rightarrow x_s - 2 \approx (3 - 2) \cdot \frac{100 - 40}{162 - 40} \Rightarrow x_s \approx 2 + (3 - 2) \cdot \frac{100 - 40}{162 - 40} \Rightarrow x_2$$

La aproximación  $x_2$  divide el intervalo de inicio  $[2,3]$  en  $[2, x_2]$  y  $[x_2, 3]$ . Utiliza entonces el segundo subintervalo para obtener de la misma forma la siguiente aproximación.

En general, podemos obtener la aproximación como sigue:

2. Cardano escribe la ecuación de la forma « $\bar{q}d\bar{q}dratum \& 3$  cubi, aequalia 100» (Cardano, 1545: fol. 53).



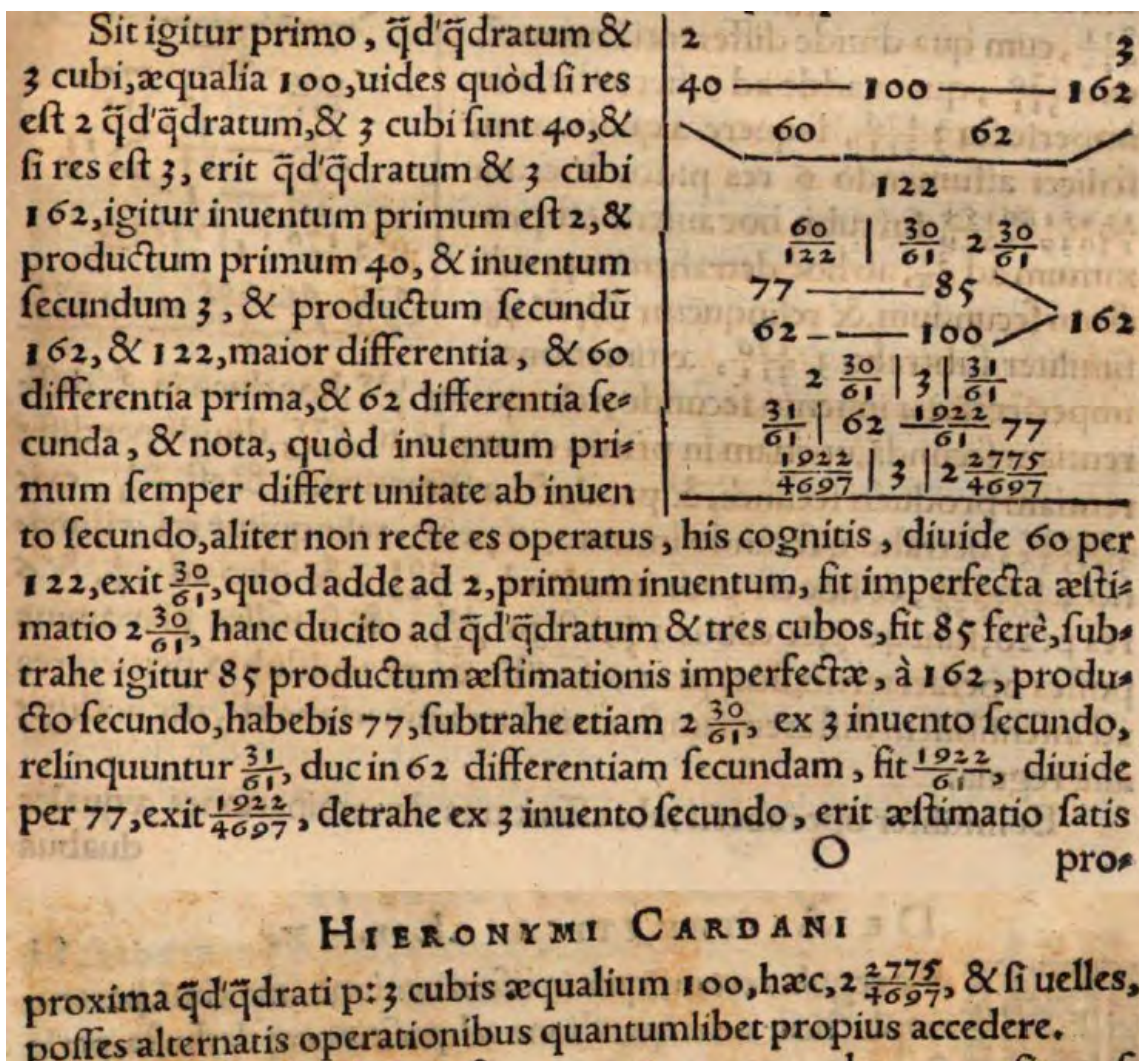


FIGURA. 2. La ecuación  $x^4 + 3x^2$  en el *Ars Magna* de Cardano

Sea un  $P(x)$  polinomio con coeficientes positivos y  $K$  un número racional positivo. Si  $x_s > 0$  es solución de  $P(x) = K$  y conocemos dos valores positivos  $p, q$  con  $p < x_s < q$ , la aproximación de Cardano  $x_n$  se obtiene mediante

$$x_n = p + (q - p) \cdot \frac{K - P(p)}{P(q) - P(p)}$$

**El método de Stevin**

Stevin nació en Brujas (Bélgica) en 1548. Una de sus mayores aportaciones reside en el trabajo sobre las fracciones decimales que publicó en 1585 en un libro de apenas 8 folios, con el título de *De Thiende*, en la versión flamenca, y *La disme*, en la versión francesa. Esta obra consta de dos partes. En la primera, establece los principios de su notación. Así, para escribir 2,71 Stevin coloca en un círculo los distintos órdenes de unidades, que sitúa encima o a la derecha de la cifra. Escribe  $2 \textcircled{0} 7 \textcircled{1} 1 \textcircled{2}$ , y lee 2 comienzos, 7 primeras, 1 segunda. En la segunda parte, explica cómo se realizan las cuatro operaciones aritméticas con los números decimales escritos de ese modo, subrayando las ventajas que supone la nueva notación.



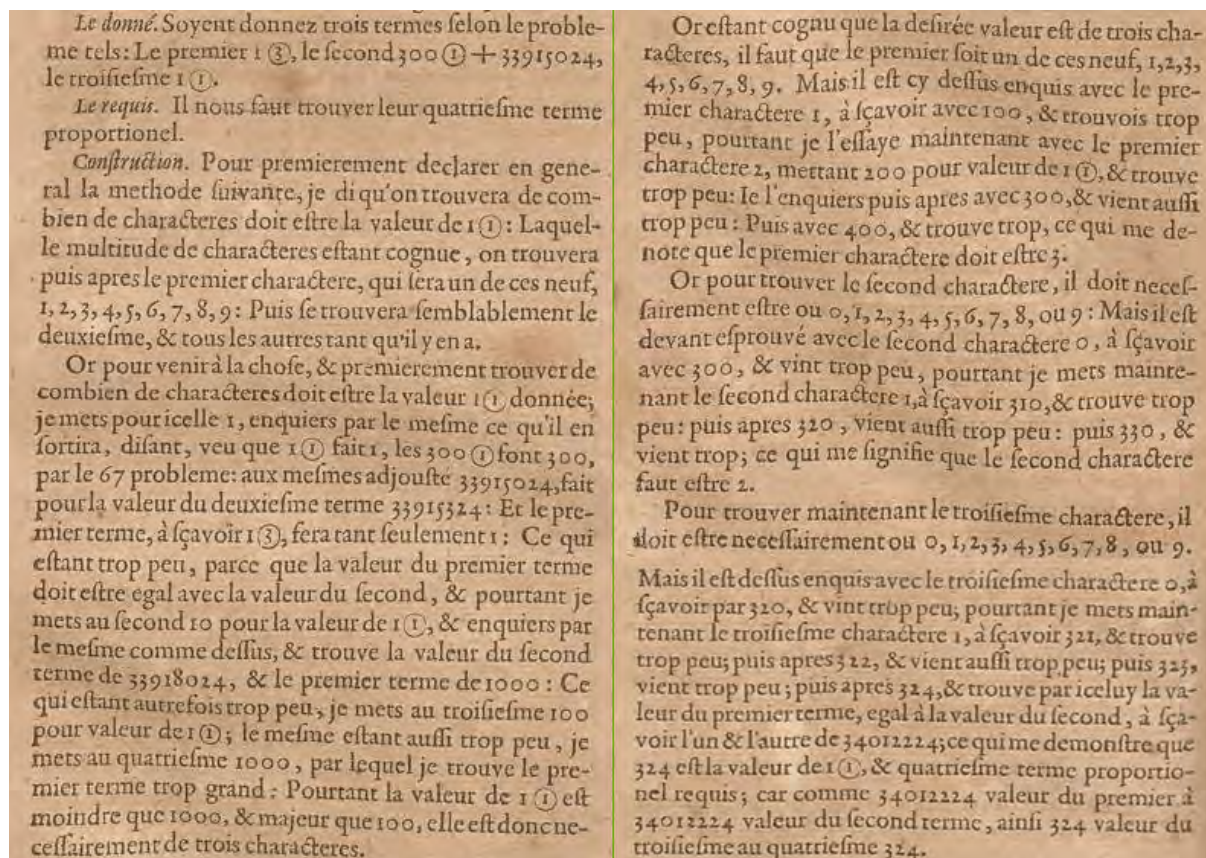


FIGURA. 3. La ecuación  $x^3 = 300x + 33\ 915\ 024$  en las obras de Simon Stevin editadas por Girard en 1634

Su método de resolución numérica de ecuaciones apareció en un panfleto publicado en 1594 bajo el título *Appendice Algébrique de Simon Stevin, de Bruges, contenant regle générale de toutes équations*. El único ejemplar original conocido se perdió en 1914, en un incendio de la biblioteca de la Universidad de Lovaina (Bélgica). Antes de su desaparición fue descrito por Gilbert (1859). Afortunadamente, aparece impresa en diferentes partes de la obra de Stevin, como en *L'Arithmétique* editada por Albert Girard en 1625 (Stevin, 1625: 351-355) y en las *Oeuvres* de Simon Stevin, editadas también por Girard en 1634 (Stevin, 1634: 88).

Veamos cómo resuelve  $x^3 = 300x + 33\ 915\ 024$ .<sup>3</sup> Stevin escribe la ecuación mediante términos proporcionales y trabaja con estas proporciones (Devreese & Vanden Berghe, 2008: 193-198). En lo que sigue, adaptamos el método a notación y procedimientos actuales con el fin de mostrar su potencial en el aula. El método se puede ver en su forma original en la figura 3. Si  $P(x) = x^3 - 300x$ , la ecuación se transforma en  $P(x) = 33\ 915\ 024$ . El proceso consiste en obtener, una a una, las cifras de la solución mediante los siguientes pasos.

1. Encontramos el número de cifras de la solución, calculando  $P(10^n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .  $P(100) < 33\ 915\ 024 < P(1000) \Rightarrow$  la solución tiene tres cifras.  
Ahora obtenemos, una a una, las cifras de la solución.

3. Stevin escribe la ecuación de la forma «Le donné. Soyent donnez trois termes selon le problema tels: Le premier 1 (3), le second 300 (1) + 33915024, le troisieme 1 (1). Le requis. Il nous faut trouver leur quatriesme terme proportionel» (Stevin, 1625: 351)

2.  $P(300) < 33\,915\,024 < P(400) \Rightarrow$  La primera cifra es 3.
3.  $P(320) < 33\,915\,024 < P(330) \Rightarrow$  La segunda cifra es 2.
4.  $P(324) < 33\,915\,024 \Rightarrow$  La tercera cifra es 4 y la solución es exacta e igual a 324.

Incluso cuando la solución es un número decimal, el proceso permite aproximarnos a ella tanto como deseemos. Así, Stevin propone en otro ejemplo la ecuación  $x^3 = 300x + 33\,900\,000$ , en la que la solución es un número decimal comprendido entre 323 y 324.

### Actividades para el aula

1. *Actividades de contextualización*, en las que se pide elaborar biografías de los matemáticos, hechos relevantes de la época...
2. *Actividades sobre la notación*, en las que se muestra la forma en que los tres matemáticos escriben las ecuaciones y se pide transcribir otras ecuaciones de la notación actual a la usada por cada matemático.
3. *Actividades de resolución de ecuaciones*, en las que después de mostrar el método de resolución de cada matemático, se pide obtener la solución de otras ecuaciones, no «preparadas» y no necesariamente polinómicas, mediante cada método.
4. *Actividades de comparación de métodos*, en las que se pide comparar la velocidad de convergencia de los tres métodos y analizar los errores cometidos en las aproximaciones.
5. *Actividades de programación*, en las que se pide programar los tres métodos. Se usará un lenguaje de programación de acceso libre (Python, Maxima...).

### Conclusiones

La inclusión de métodos numéricos en la enseñanza media es importante para complementar los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones. La historia de las matemáticas nos ofrece recursos para introducir el tema de forma atractiva, mostrándonos una perspectiva de la génesis y evolución de dichos métodos, enriqueciendo de este modo la cultura matemática y general de alumno y profesor. Además, nos proporciona la posibilidad de hacer ver a los alumnos la evolución de la notación algebraica en esta época, hecho absolutamente decisivo en la rápida y potente evolución de las matemáticas en el siglo XVII. Y nos enseña que son compatibles con el fomento de las nuevas tecnologías en el aula mediante la programación de los diferentes métodos.

### Agradecimientos

Agradecemos la financiación y apoyo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

## Referencias bibliográficas

- CARDANO, G. (1545), *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis*, Núremberg, Petreius.
- CARM (2015), Decretos nº 220/2015 y nº 221/2015, de 2 de septiembre de 2015, por los que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, BORM 3/10/2015, Murcia, Boletín Oficial de la Región de Murcia.
- CHUQUET, N. (1484), *Triparty en la science des nombres*, Paris, Lyon, BNF, ms fds fr. 1346.
- DEVREESE, J. T.; VANDEN BERGHE, G. (2008), *Magic is No Magic The Wonderful World of Simon Stevin*, Southampton, Wit press.
- FAUVEL, J. ; MAANEN, J. V. (2000), *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht, Kluwer.
- FLEGG, G.; HAY, C.; MOSS, B. (1985), *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company.
- GILBERT, P. (1859), «Note sur un opuscule peu connu de Simon Stevin de Bruges. Lettre a M. Ad. Quetelet», *Revue Catholique*, 8, 192-197.
- KATZ, V. ; TZANAKIS, C. (2011), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, Mathematical Association of America, MAA Notes series 78.
- MARRE, A. (1880), «Le Triparty en la science des nombres: publié d'après le manuscrit fonds français nº 1346 de la Bibliothèque nationale de Paris par maître Nicolas Chuquet Parisien et précédé d'une Notice par M. Aristide Marre», *Extrait du Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 13 (obra original 1484).
- MASSA-ESTEVE, M. (2014), «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)», *Teaching Innovations*, 27, 114-126.
- NORGAARD, M. (1922), *A historical survey of algebraic methods of approximating the roots of numerical higher equations up to the year 1819*, Nova York, Teachers College Columbia University.
- STEVIN, S. (1625), *L'Arithmétique*, GIRARD, A. (ed.), Leiden, Elseviers.
- STEVIN, S. (1634), *Les oeuvres mathematiques*, GIRARD, A. (ed.), Leiden, Elseviers.

## COMENTARIS SOBRE 'ANALYSE DES INFINIMENT PETITS' DE L'HOSPITAL (1696- 1768): INTERPRETACIÓ I ENSENYAMENT DE CONCEPTES FONAMENTALS DEL CÀLCUL DIFERENCIAL

**SANDRA BELLA;<sup>1</sup> MÒNICA BLANCO<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> UNIVERSITÉ DE NANTES; LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES JEAN LERAY  
(NANTES), LABORATOIRE SPHERE (PARIS).

<sup>2</sup> DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *L'Hospital, Varignon, Crousaz, Paulian, càlcul diferencial*

### **Commentaries on the 'Analyse des Infiniment Petits' of L'Hospital (1696-1768): Interpretation and Teaching of the Fundamental Concepts of the Differential Calculus**

*Summary: In 1696 the Marquis de L'Hospital (1661-1704) published the 'Analyse des infiniment petits' pour l'intelligence des lignes courbes, the first systematic work on differential calculus. The 'Analyse' played a fundamental role in the circulation and teaching of the Leibnizian calculus. To help readers understand the 'Analyse' three commentaries were subsequently published in France: i) 'Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits' (Paris, 1725), by Pierre Varignon (1654-1722); ii) 'Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits' (Paris, 1721), by Jean Pierre Crousaz (1663-1750); iii) 'Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage' (Avignon, 1768), by Aimé Henri Paulian (1722-1802). The main aim of this contribution is to show how the authors of these commentaries interpreted and explained some fundamental concepts contained in the 'Analyse', such as the definition of difference and the rule of the product.*

*Key words: L'Hospital, Varignon, Crousaz, Paulian, differential calculus*

## 1. Introducció

Els primers articles utilitzant el nou càlcul de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) són publicats en 1684 i 1686 als *Acta Eruditorum*. Durant la seva estada a París durant l'any 1692, Johann Bernoulli (1668-1748) inicia al càlcul leibnizià un cercle constituït entorn del filòsof Nicolas Malebranche (1638-1715). A més de Malebranche, també pertanyien a aquest cercle Guillaume F. A. Marquès de L'Hospital (1661-1704), Pierre Varignon (1654-1722), entre d'altres.<sup>1</sup> El 1696, L'Hospital va publicar el primer tractat sobre càlcul diferencial: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. La publicació de l'*Analyse* va tenir un paper fonamental en el context del desenvolupament històric del càlcul leibnizià i, en particular, per a la seva difusió i ensenyament. La primera secció està dedicada a enunciar les definicions, les demandes i les regles de la diferenciació. Les altres seccions proposen totes les aplicacions del càlcul conegudes per resoldre problemes relacionats amb corbes: ja siguin els típics de determinació de tangents o de màxims i mínims, o bé els nous problemes, com poden ser la recerca d'evolutes, càustiques i envolupants. Per a aquests últims, el nou càlcul és gairebé l'únic capaç de resoldre'ls de manera general.

La ressenya de l'*Analyse* feta al *Journal des Sçavants* (juny 1696) fa elogis de la manera estructurada i coherent de la presentació que s'hi fa del nou càlcul, però també indica que L'Hospital destina el seu llibre als «connaisseurs». Així doncs, la lectura de l'*Analyse* és considerada des del principi de difícil accés per als no *savants*, tal com es mostra a Bella (2013). Per aquesta raó, per a aclarir aquelles parts de l'*Analyse* que podien resultar més difícils d'entendre, a França es van publicar els tres comentaris següents com a suplement de l'obra de L'Hospital:

- i) *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1725), de Pierre Varignon (1654-1722), basat en les notes de Varignon, però escrit en part probablement poc després de la publicació de l'*Analyse*;
- ii) *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits* (París, 1721), de Jean Pierre Crousaz (1663-1750), i
- iii) *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage* (Avignon, 1768), d' Aimé Henri Paulian (1722-1802), publicat amb la tercera edició de l'*Analyse*.

Aquests comentaris explicaven l'obra de L'Hospital, segons enfocaments pedagògics diversos, en un intent de fer-la més entenedora.<sup>2</sup> Tot i reconèixer que l'*Analyse* era una bona obra en general, Crousaz i Paulian consideraven que només s'adreçava als *savants*, de manera que amb els seus comentaris intentaren arribar als principiants d'una forma més pedagògica, tal com es pot llegir als seus prefacis. En canvi, en el cas de Varignon es tractava d'apunts personals per a clarificar el contingut de l'*Analyse* essencialment per als *savants*, potser amb la idea d'afegir-lo com a annex d'una nova edició de l'obra de L'Hospital. La publicació de l'obra de L'Hospital i els posteriors comentaris permeten reconstruir la discussió sobre què es podia considerar com a pedagogia «acceptada» en aquest context específic, prenent aquest terme de Kaiser (2005: 250).

1. Robinet (1960) va fer un estudi excel·lent sobre el cercle de Malebranche i la introducció del càlcul a França.

2. El 1781 apareix una nova edició, revisada i augmentada per Louis Lefèvre-Gineau (1751-1829). Però en aquest cas les notes estan escrites des d'un enfocament proper a Euler, l'estudi de les quals cau fora de l'abast d'aquesta contribució.



Aquesta contribució forma part d'un treball en curs l'objectiu principal del qual és analitzar i comparar la manera com els autors dels comentaris van entendre, interpretar i, posteriorment, ensenyar alguns dels conceptes fonamentals que apareixien a l'*Analyse* de L'Hospital, com ara la definició de diferència, la regla del producte, les diferències d'ordre superior o la determinació de màxims i mínims. En particular, aquesta contribució primer presenta els comentaris de Varignon, Crousaz i Paulian, tot mostrant quina era la motivació darrera de cadascun d'ells, i explorant a partir dels seus prefacis com entenien els autors l'ensenyament del càlcul diferencial. Finalment, s'analitza i es compara com s'exposava la regla del producte als tres comentaris estudiats.

## 2. 'Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits' de Varignon (1725)

Pierre Varignon fou educat al *collège* jesuïta de Caen. Des de 1688 fins a la seva mort fou professor de matemàtiques al *collège* Mazarin, i el 1694 obtingué també la càtedra de filosofia grega i llatina al *Collège Royal* de París. Fou nomenat membre l'Acadèmia de Ciències de París el 1688 amb el títol de geòmetra, tot i que es dedicava més aviat a la mecànica. A més de la revisió del text de L'Hospital, en alguns casos els *Éclaircissemens* de Varignon contenen problemes addicionals, proposicions noves i mètodes alternatius. El llibreter Jacques Rollin (1703? - 1768) comprà el manuscrit dels *Éclaircissemens* de Varignon i decidí publicar-lo<sup>3</sup> per «faire présent aux Savans» (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 2). Segons Rollin, es tractava de reflexions i recerca de Varignon, per perfeccionar l'*Analyse* (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 1). De fet, fou el mateix Rollin qui donà el títol d'*Éclaircissemens* a aquestes notes de Varignon, i qui decidí de publicar-les per separat, de manera independent de l'*Analyse* ja que així «les gens du métier» podrien llegir de manera més còmoda l'*Analyse* tenint el comentari al costat (Varignon, 1725, *Le Libraire au Lecteur*: 3).

## 3. 'Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits' de Crousaz (1721)

El lausanes Jean-Pierre de Crousaz fou professor de filosofia i matemàtiques a l'Acadèmia de Lausanne entre 1700 i 1724 i a la Universitat de Groninga entre 1724-1726. Amb gran vocació per ensenyar, Crousaz va publicar diverses obres de matemàtiques, fruit de les seves reflexions sobre l'ensenyament, com per exemple, *Réflexions sur l'utilité des Mathématiques, & sur la manière de les étudier, avec un nouvel essai d'Arithmétique démontrée* (1715), *Nouvelles maximes sur l'éducation des enfants* (1718) i *Traité de l'Éducation des Enfants* (1722).

Cap al 1710 Crousaz s'inicià al càlcul de diferències a partir de l'obra de L'Hospital. Tanmateix, segons Crousaz, la presentació de L'Hospital no facilita l'aprenentatge del càlcul ja que és laconica i plena d'obscuritat. Així ho explica en una carta al seu amic Réaumur el 1719:

Quelquefois il m'a paru qu'elles auraient été plus claires [les propositions] et même plus justes s'il les avaient proposées dans d'autres termes et sous d'autres jours, quelquefois je vous l'avoue il m'a fallu deviner et de temps en temps, il me semble que j'avais plutôt fait de résoudre de moi-même un de ses problèmes, comme j'aurais fait un énigme que d'en apprendre la solution de l'Auteur même. (Crousaz a Réaumur, 2 de febrer 1719)



Això el va portar a preparar el seu *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*, precedit de dos discursos, el primer sobre la naturalesa dels infinitament petits, i el segon sobre el càlcul de potències. Al prefaci Crousaz comença exposant les raons que l'havien motivat a escriure el seu *commentaire* sobre l'*Analyse*:

Les Exemples du Calcul différentiel qu'on y trouve, présentent bien le résultat de ce Calcul, & la conclusion où l'on arrivera en le faisant, mais ils n'apprenent pas pour cela à le faire, & on ne le voit point naître & s'avancer depuis la première supposition, & dès l'état de la question jusques à ce que l'on ait trouvé ce que l'on cherche. (Crousaz, 1721: i)

A més a més, per assolir un resultat donat, el lector havia d'estar familiaritzat amb geometria i àlgebra, entre altres. Segons Crousaz, si L'Hospital hagués inclòs algunes referències, podria haver guiat millor el lector de l'*Analyse*, i per això creu necessari aconsellar el lector i afegir addicions i remarques a l'*Analyse* «pour le rendre plus intelligible» (Crousaz, 1721: 4). Si bé L'Hospital semblava adreçar-se als *savants*, en canvi Crousaz afirmava: «j'ai mieux aimé que les Sçavans trouvassent du superflu dans mon Ouvrage, que de donner lieu aux Commençans de se plaindre, que le nécessaire y manquoit» (Crousaz, 1721: xxii). És, precisament, el seu interès per arribar als principiants allò que Bernard-Joseph Saurin (1706-1781) destacà a la seva «approbation» del comentari de Crousaz:

on ne sçauroit trop le louer de n'avoir pas dédaigné dans celui-cy [cet ouvrage] de descendre jusqu'aux plus petits détails, & aux difficultés les plus légères, pour faciliter aux commençans l'intelligence de l'excellent traité qu'il commente. (Crousaz, 1721, Approbation)

#### 4. 'Un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage' de Paulian (1768)

L'autor del tercer comentari que estudiarem, el jesuïta Aimé-Henri Paulian, fou professor de física a diversos *collèges* jesuïtes francesos (Taton, 1986: 38, 44, 49). Va elaborar i publicar diverses obres sobre física, de les quals destaquen el *Dictionnaire de physique* (1761), que es va editar almenys nou vegades, i *Traité de paix entre Descartes et Newton* (1764). Pel que fa a les matemàtiques, i en particular al seu ensenyament, Paulian publicà el 1765 la *Guide des jeunes mathématiciens*, un comentari sobre l'edició de 1764 de les *Leçons élémentaires de mathématiques* de Nicolas-Louis de La Caille (1713-1762). La primera edició de l'obra de La Caille (1741) contenia únicament geometria i àlgebra; però a partir de la quarta edició (1756) s'hi van afegir els fonaments de càlcul diferencial i integral. El 1768 apareix un nou comentari sobre l'*Analyse des infiniment petits*, amb la tercera edició, «Par l'auteur du *Guide des jeunes mathématiciens* dans l'étude des *Leçons de Mathématiques* de M. l'Abbé de la Caille», és a dir, Paulian.

Al començament del seu prefaci Paulian explica que a L'Hospital se li retreu «n'avoir écrit que pour les Sçavans» (Paulian, 1768: ij). L'objectiu principal de Paulian és ajudar «les Commençans à se passer de guide dans la route épineuse du calcul différentiel» (Paulian, 1768: vj-vij). Com ja havia fet Crousaz, Paulian critica L'Hospital per presentar les regles del càlcul de manera massa concisa (Paulian, 1768: vij-viiij). En general, Paulian valorava positivament les contribucions de Varignon i de Crousaz (Paulian, 1768: xiiij). Segons Paulian, Varignon havia intentat aclarir només aquells aspectes

que li havien costat d'entendre i els seus *Éclaircissemens* no eren adients per a un principiant (Paulian, 1768: v). El comentari de Paulian conté referències sobre allò que es podia considerar com a coneixements previs necessaris per a l'estudi de l'*Analyse des infiniments petits*: aritmètica ordinària i algebrica, anàlisi o ciència de les equacions, geometria especulativa i pràctica i trigonometria (Paulian, 1768: xiv). En particular, Paulian sovint esmenta els elements d'àlgebra i geometria de M. L'Abbé de la Caille i el seu propi comentari *Guide des jeunes Mathématiciens*.

## 5. La diferenciació del producte

Examinar les justificacions de la regla de la diferenciació del producte és interessant ja que en les explicacions es mostra de quina manera es tracta amb quantitats infinitament petites. L'Hospital començava la secció I de l'*Analyse* amb les definicions següents:

DÉFINITION I: On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. (L'Hospital, 1696: 2)

DÉFINITION II: La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. (L'Hospital, 1696: 3)

A continuació, L'Hospital enuncia la primera demanda o suposició, de la qual afirma que no cal demostració (fig. 1):

I. DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre  $Ap$  pour  $AP$ ,  $pm$  pour  $PM$ , l'espace  $Apm$  pour l'espace  $APM$ , le petit espace  $MPpm$  pour le petit rectangle  $MPpR$ , le petit secteur  $AMm$  pour le petit triangle  $AMS$ , l'angle  $pAm$  pour l'angle  $PAM$ , &c. (L'Hospital, 1696: art. 2)

L'Hospital es recolza en aquesta primera demanda per formular la regla de diferenciació del producte de  $xy$  (L'Hospital, 1696: art. 5). Si la quantitat  $x$  creix i esdevé  $x + dx$ , la quantitat  $y$  esdevé  $y + dy$ , i la diferència del producte és  $ydx + xdy + dx dy$ . Si es divideix  $ydx$  i  $dx dy$  per  $dx$ , resulta  $y$  i  $dy$ , respectivament. Com que  $dy$  és infinitament menor que  $y$ , aleshores el terme  $dx dy$  es pot negligir perquè és infinitament menor que  $ydx$  i que  $xdy$ . I la diferència del producte és  $ydx + xdy$ .

En els seus *Éclaircissemens*, Varignon, per precisar la definició de diferència de L'Hospital com a «porció infinitament petita en què una quantitat variable augmenta o disminueix contínuament», incorpora la idea de «l'augment o disminució instantània del seu valor» inspirada probablement de la mecànica. És obvi ja que gran part de les aplicacions que Varignon fa del càlcul són per resoldre problemes físicomatemàtics, com els seus *mémoires* acadèmics ho demostren. Pel que fa a la primera demanda, Varignon l'escriu de manera similar a L'Hospital però incorporant la idea de canvi indefinidament petit o nul: «Mutatio indefinite parva, mutatio nulla» (Varignon, 1725: 2).

I a continuació Varignon afegeix una demanda suplementària (absent a l'*Analyse*) que «Tout produit qui résulte d'une quantité indéfiniment petite par une autre quantité indéfiniment petite, est

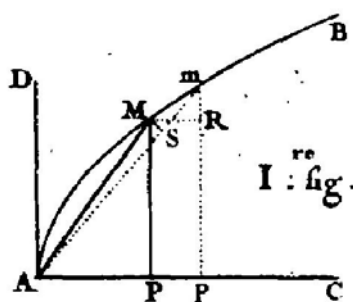


FIGURA 1. Figura 1 de L'Hospital (1696)

nul» (Varignon, 1725: 2), i aquí s'ha d'entendre «nul» en sentit relatiu. Així, quan justifica la regla de diferenciació del producte  $axy$ , el terme  $dx dy$  és nul (Varignon, 1725: 5).

En relació amb la primera demanda, Crousaz ha explicat en el primer discurs que per quantitat infinitament petita s'ha d'entendre «une partie aussi petite que l'on veut et que le besoin qu'on en a le demande» (Crousaz, 1721: 4), i també en quin sentit es pot negligir una quantitat relativament a una altra: «le terme d'infiniment petit n'est pas absolu, mais un terme relatif & de comparaison» (Crousaz, 1721: 3). Fa servir moltes comparacions per a explicar el sentit relatiu dels infinitament petits:

Le diamètre de la Terre est d'environ 3000 lieuës, celui du tour annuel qu'ell fait autor du Soleil est 12000 fois plus grand: cette étenduë néanmoins est peut être plus petite en comparaison de la distance qu'il y a du Soleil jusqu'à quelques étoiles fixes, qu'un homme ne l'est à l'égard de toute la Terre. (Crousaz, 1721: 4)

Trobem comparacions semblants al text de Paulian, per fer entendre la primera demanda (Paulian, 1768, Note I: 257). Totes aquestes comparacions Paulian diu haver-les tret del curs de matemàtiques de Christian Wolff (1679-1754) (Wolff, 1713-1715, vol. I: 418).

I tots dos autors justifiquen de manera geomètrica, a partir de la figura del «rectangle», per què  $dx dy$  es pot negligir. Paulian (1768, Note II: 260), de manera semblant a Crousaz (1721: 21) (fig. 2a), afirma que els rectangles infinitament petits  $CDop$  ( $y dx$ ) i  $BmDn$  ( $x dy$ ) són infinitament més grans que el rectangle  $Dnpr$  o  $dx dy$  (fig. 2b). Com abans, Wolff (1713-1715, vol. I: 419) ja havia utilitzat el recurs del rectangle per explicar la diferència del producte.

## 6. Algunes reflexions finals

L'estudi dels prefacs dels comentaris de Crousaz i de Paulian permet copsar com s'havia d'ensenyar el càlcul als principiants, en oposició als *Éclaircissements* de Varignon, amb clarificacions més aviat per als *savants*. Aquesta dicotomia principiant-*savant* queda palesa en la manera com Crousaz i Paulian utilitzen figures geomètriques i exemples del món físic com a recurs per a explicar els elements i definicions de l'*Analyse*. En un moment en què diversos debats sobre la naturalesa dels infinitament petits ja havien tingut lloc, Crousaz i Paulian apostaren per arguments ja superats, ja debatuts, fins i tot potser poc rigorosos, però que, en ser més visuals i més intuïtius, podien resultar útils per a en-

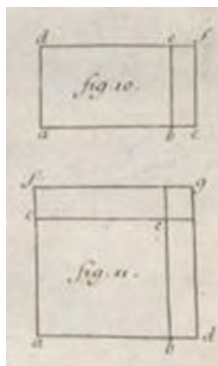


FIGURA 2a. Figura 11 de Crousaz (1721)

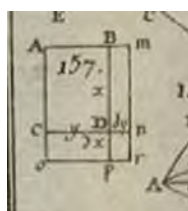


FIGURA 2b. Figura 157 de Paulian (1768)

senyar el càlcul. Així doncs, l'anàlisi comparativa d'altres conceptes, com les diferències d'ordre superior, les tangents i la determinació de màxims i mínims, podrà aportar llum sobre quina era la pedagogia «acceptada» del càlcul que els comentaris de l'*Analyse* presenten.

### Agraïments

Aquesta investigació compta amb el suport del projecte HAR2016-75871-R i el GDR 3398.

## Referències bibliogràfiques

BELLA, S. (2013), «L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes: ouvrage de recherche ou d'enseignement?». A: BARBIN, E.; MOYON, M. (ed.), *Les ouvrages de Mathématiques dans l'Histoire*, Limoges, PULIM, 73-85.

BLANCO, M. (2008), «On how Johann Bernoulli's lessons on differential calculus were communicated in eighteenth-century France and Italy». A: SIMON, J.; HERRAN, N., amb LANUZA-NAVARRO, T.; RUIZ-CASTELL, P.; GUILLEM-LLOBAT, X. (ed.), *Beyond Borders: Fresh Perspectives in History of Science*, Cambridge, Cambridge Scholars Press, 113-140.

CROUSAZ, J. P. (1721), *Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits*, Paris, Chez Montalant.

KAISER, D. (2005), «Training and the Generalist's Vision in the History of Science», *Isis*, 96, 244-251.

L'HOSPITAL, G. F. A. de (1696), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, Imprimerie Royale.

PAULIAN, A. H. (1768), *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage*, Avignon, Chez la Veuve Girard et François Seguin.

ROBINET, A. (1960), «Le groupe malebranchiste introducteur du Calcul infinitésimal en France», *Revue d'Histoire des Sciences*, XIII, 287-308.

TATON, R. (ed.) (1986), *Enseignement et diffusion des sciences en France au dix-huitième siècle*, Paris, Hermann.

VARIGNON, P. (1725), *Éclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, Paris, Chez Rollin.

WOLFF, C. (1713-1715), *Elementa Matheseos Univer-sae*, IV vol., Halle (edició de 1732).

## EL VIATGE DEL 'BEAGLE', LA GRAN AVENTURA DE DARWIN. UNA PROPOSTA DE TREBALL INTERDISCIPLINARI

**AGUSTÍ CAMÓS CABECERAN**

CENTRE D'HISTÒRIA DE LES CIÈNCIES. UNIVERSITAT AUTÒNOMA  
DE BARCELONA.

Paraules clau: *Darwin, Journal of researches, 'Beagle', projecte interdisciplinari*

### **The Travel of the 'Beagle', the Great Adventure of Darwin. A Proposal of Interdisciplinary Work**

*Summary: An interdisciplinary work project is proposed to be developed at the stage of compulsory secondary education. The work axis would be the book by Charles Darwin 'Journal of researches'. From fragments of this book students would work in groups different aspects related to the study of nature, such as zoology, botany, evolution, volcanoes, earthquakes, atolls or physics; as well as related with social sciences, such as colonization, slavery, literature or history, or others linked to languages, mathematics or technology. Finally, the various works would be exhibited and debated in the classroom.*

*Key words: Darwin, Journal of researches, 'Beagle', Interdisciplinary project*

### **Introducció**

A partir de l'obra de Darwin *Journal of researches*, o d'una de les seves traduccions, es proposa realitzar amb els alumnes de segon cicle d'ESO un projecte col·lectiu d'investigació que tracti aspectes de diferents disciplines que s'aborden en el llibre o bé hi estan directament relacionats. Com en totes les obres sobre viatges, en aquest llibre de Darwin es tracten aspectes molts diversos relacionats amb la natura, la geografia, la història, la societat, etc., però aquest llibre presenta dos trets que el fan especialment interessant: el seu autor, un dels més grans científics de la història, i el seu paper en la història de la llengua i la cultura catalanes.



### La gènesi del 'Journal of researches'

En el llibre Darwin fa el seu relat sobre el viatge que va realitzar entre 1831 i 1836 a bord del *Beagle*, que va redactar a partir del diari que havia anat escrivint al llarg d'aquells cinc anys. Es va publicar inicialment l'any 1839, juntament amb altres llibres que tractaven sobre els dos viatges realitzats pel *Beagle* a Sud-Amèrica, que van ser escrits pels dos capitans del vaixell, P. Parker King i Robert FitzRoy. A causa de l'èxit del volum de Darwin, el mateix any es va tornar a editar de forma separada. L'any 1845 se'n va fer una nova edició revisada que es convertiria en l'edició definitiva i que seria traduïda a molts idiomes, entre ells el català i el castellà.

Cal remarcar que en el període de temps que va des que Darwin s'embarcà en el vaixell i començà a escriure el diari, l'any 1831, fins al moment en què va escriure el llibre, l'any 1837, i sobretot quan va fer la seva revisió, l'any 1845, el pensament de Darwin sobre la natura havia canviat radicalment. Quan Darwin va sortir de Plymouth l'any 1831 tenia una visió fixista dels éssers vius que no va arribar a canviar radicalment en tornar a Anglaterra l'any 1836, però que havia incorporat una gran quantitat d'informació que hauria de fer mutar posteriorment de forma radical el seu pensament. L'any 1837, quan va fer la primera redacció del llibre (Browne, 2008: 146), coincideix amb l'inici de les seves reflexions sobre l'origen de les espècies que plasmà en els famosos *notebooks* sobre el transformisme que començà a escriure mentre estava redactant el llibre. A més, durant el període que va des de la primera redacció de l'any 1837 fins a la revisió de l'any 1845, el pensament evolucionista de Darwin es va consolidar redactant les primeres formulacions de la seva teoria, la primera (d'unes desenes de pàgines) l'any 1842, i la segona (de dos centenars de pàgines) l'any 1844, que ja estava llesta per a ser publicada si les condicions haguessin estat favorables (Browne, 2008: 617-619). Però les mateixes pors de Darwin de les reaccions que es podien produir en fer pública la seva teoria de l'evolució, així com l'agre debat que va esclatar a Anglaterra arran de la publicació anònima del llibre evolucionista *Vestiges of the Natural History of the Creation*, l'any 1844, el van fer desistir de donar a conèixer la seva teoria de l'evolució fins a l'any 1859. Així doncs, encara que durant el viatge Darwin hagués mantingut una visió fixista dels éssers vius, com que el llibre va ser escrit l'any 1837 i revisat l'any 1845, ja hi trobem reflexions evolucionistes, especialment en la segona edició. Cal remarcar que fins al final de la seva vida Darwin se sentí molt orgullós del llibre sobre el viatge del *Beagle* i de la revisió que n'havia fet l'any 1845, tal i com es mostra en el següent fragment de l'autobiografia que va escriure l'any 1876, quan ja tenia 67 anys (Darwin, 2008: 117):

El 1845 em vaig esforçar molt a corregir una nova edició del meu Diari de recerques, que s'havia publicat originalment el 1839 com a part d'una obra de Fitz-Roy. L'èxit del meu primer fill literari sempre alimenta la meua vanitat més que el de qualsevol llibre meu. Encara avui es continua venent de manera constant a Anglaterra i als Estats Units, i s'ha traduït per segona vegada a l'alemany, i també al francès i a altres llengües. Aquest èxit d'un llibre de viatges, sobretot d'un de científic, tants anys després de la seva publicació és sorprenent.

### Relació amb la història de la ciència i la cultura catalanes

La traducció al català del *Journal of researches* té una significació molt especial ja que es tracta de la primera obra científica que es traduí al català en l'època moderna (Camós, 2010: 138-139). La traducció aparegué en fascicles com a suplement del que també va ser el primer diari en llengua catalana, el *Diari Català*. Aquest diari fou el fruit d'un projecte impulsat per Valentí Almirall i Joaquim

Bartrina. El primer número va aparèixer el maig de 1879, convertint-se en una important plataforma de difusió del catalanisme polític d'esquerres. Així doncs, el projecte de la traducció d'aquesta obra es troba lligat al moviment catalanista en la seva branca progressista. La traducció posa de manifest la voluntat d'expansió de l'ús del català més enllà de l'art i la literatura per entrar en l'àmbit de la ciència, com queda clarament reflectit al «Prospecte» que apareix en el primer número del diari:

Voldríem que lo renaixement català, que ha produït ja una manera pròpia en vàries de les manifestacions de l'art, tingués també en algunes branques de la ciència, si no en totes, mires pròpies i procediments especials.<sup>1</sup>

El més previsible hauria estat que la traducció de l'obra de Darwin la fes Joaquim Bartrina, que ja havia estat un element clau en el llançament del diari i tenia experiència com a traductor del naturalista anglès, ja que havia fet la primera traducció al castellà de *The Descent of Man*. Però quan començà la publicació del diari i de la traducció de l'obra Bartrina ja es trobava malalt, i de fet moriria al cap de pocs mesos. Per aquesta raó la traducció la va fer Leandre Pons i Dalmau, membre de la redacció del diari i agrònom de formació. La traducció no es va poder completar ja que el 30 de juny de 1881 es va haver de suspendre la publicació del diari i, per tant, també dels fascicles, quan ja s'havien publicat disset dels vint-i-un capítols de l'obra, de manera que van quedar quatre capítols sense publicar en català.

### El desenvolupament del projecte de treball

Un projecte d'aquestes característiques necessita el compromís dels professors de diverses disciplines per treballar en equip, ja que la idea seria poder abordar a partir de l'obra continguts de biologia i geologia, física, ciències socials, ètica, matemàtiques, llengües, tecnologia etc. Depenent de la formació dels professors que es vincuessin al projecte es podrien tractar temes relacionats amb totes les disciplines o bé d'una part d'elles.

També s'hauria de buscar la complicitat dels alumnes. El fet de proposar-los una forma de treballar que trenqui amb la rutina acadèmica, que els permeti escollir temes que els interessin particularment i investigar i explorar per ells mateixos, pot facilitar la seva implicació, que és del tot necessària. Els alumnes s'organitzarien en grups d'entre dos i quatre, i escollirien d'entre tots els temes proposats un mínim de dos temes de disciplines diferents. Els treballs realitzats per cada grup conclourien amb una presentació a la resta de la classe seguida d'un debat.

El projecte s'iniciaria amb una presentació per part del professor del viatge de *Beagle* i de la figura de Charles Darwin. Al llarg de l'exposició haurien d'anar apareixent els diferents temes relacionats amb el viatge que es podrien tractar. Un cop formats el grups s'escollirien els temes a treballar. Els alumnes també podrien proposar altres temes relacionats amb el viatge.

Un cop conegut el context de l'obra i escollits els temes a desenvolupar per cada grup, se'ls entregarien fragments del llibre relacionats amb cada temàtica escollida que constituïrien el punt de partida de la seva investigació. A partir d'aquest moment els diferents grups d'alumnes començarien a treballar i investigar cada tema de forma autònoma, sota l'orientació i la supervisió del professorat.

---

1. Citat per Camarasa (1982: XI-XII).

Cal afegir que per al desenvolupament del projecte disposem dels grans recursos que ens aporta Internet, especialment la pàgina: <<http://darwin-online.org.uk/>>. En aquesta fantàstica web podem trobar totes les obres de Darwin en diverses edicions i traduccions, la major part dels seus manuscrits i més de tres mil imatges, entre altres recursos. El més important que ens ofereix per al nostre cas és l'edició original de *Journal of researches*, de 1845, en forma de text i de pdf (Darwin, 1845), així com diverses traduccions al castellà que es poden descarregar. Com que és difícil que els nostres alumnes puguin treballar amb l'edició anglesa, s'hauria d'utilitzar com a referència una traducció al castellà, com la de Juan Mateos que va publicar l'editorial Calpe l'any 1821, que es troba a la web i que també es pot trobar en paper (Darwin, 1921).

### **Possibles temes que podrien treballar els alumnes**

Considerant el perfil del seu autor, el llibre tracta de forma àmplia diferents aspectes relacionats amb la natura, tant de biologia com de geologia. Hi ha nombroses descripcions zoològiques, especialment de mamífers i d'ocells, però també hi podem trobar descripcions de rèptils, d'artròpodes i fins i tot de cnidaris. És molt destacable la descripció de la zoologia d'algunes illes com les Galápagos o les Malvines. També són abundants les descripcions botàniques, i en destaca el gran impacte que li va produir el bosc tropical. Són de gran importància les reflexions sobre la distribució geogràfica de diversos animals i plantes.

En l'obra també hi trobem nombroses descripcions geològiques; no és estrany si considerem que Darwin en sortir de Plymouth es considerava més geòleg que altra cosa. Són especialment interessants les descripcions de volcans i terratrèmols que sovintegen quan descriu els seus moviments per la costa Pacífica de Sud-Amèrica. També són molt importants les seves referències a l'«actualisme» i al «catastrofisme»; cal recordar que Darwin va llegir els *Principles of Geology* de Lyell durant el viatge, i que aquesta obra tingué una gran influència en la seva obra científica. Al final del viatge, durant la travessia del Pacífic i l'Índic sovintegen les descripcions i reflexions sobre les barreres de corall i els atols.

També són molt rellevants les descripcions de restes paleontològiques, especialment de les restes de grans organismes que va trobar a Sud-Amèrica. En aquest sentit són de gran interès les reflexions que fa entorn de les extincions així com els possibles canvis en el clima i en la distribució dels organismes.

Tractant-se d'una obra de Darwin escrita i posteriorment revisada mentre reflexionava i escrivia sobre l'origen de les espècies, també trobem en el llibre diferents paràgrafs relacionats amb l'evolució de les espècies. En el text també hi trobem alguna referència a l'obra de Lamarck, el primer naturalista que va formular una teoria evolucionista.

Quant a la física, hi trobem bastantes referències al clima, a la meteorologia i particularment als vents; en aquest sentit cal recordar l'important paper que va tenir Francis Beaufort, l'autor de la famosa escala dels vents, en l'admissió de Darwin com a acompanyant del capità Robert FitzRoy a bord del *Beagle*, i que va ser precisament en el viatge que fer Darwin quan es va usar oficialment per primer cop aquesta escala dels vents per part de la Royal Navy. Pel que fa a la matemàtica i la tecnologia és important tot allò relacionat amb la navegació i les diferents mesures de posicionament.

En relació amb les ciències socials, com és lògic hi ha molta informació geogràfica que abasta Sud-Amèrica, Austràlia i diferents illes de l'Atlàntic, el Pacífic i l'Índic. Apareixen també moltes referències a la independència de les colònies espanyoles, particularment a la independència d'Argentina

i al paper del general Rosas, així com a la independència de Xile. Hi ha també moltes explicacions relatives a la colonització i a l'extermini dels indígenes. És particularment interessant tot allò relacionat amb els habitants de Tierra de Fuego i els indígenes que FitzRoy es va endur en una primera expedició del *Beagle*, i que retornà juntament amb un missioner en la segona expedició, en la qual viatjà Darwin, després haver-los «civilitzat i cristianitzat» a Anglaterra. Al llarg de tot el llibre reflexiona entorn de la relació entre la colonització i la religió, fins al punt que el primer que va publicar Darwin sobre el viatge del *Beagle* va ser un article escrit juntament amb FitzRoy on defensava l'important paper civilitzador dels missioners anglicans (FitzRoy & Darwin: 1836).

En relació amb l'ètica trobem nombroses referències a un tema que el preocupà especialment i que li generà algunes friccions amb el capità del vaixell: l'esclavisme. També hi ha referències a les terribles condicions de vida dels miners i dels pagesos. En relació amb la vida de FitzRoy també es podrien abordar temes relacionats amb la salut mental, el suïcidi o la mort.

Pel que fa a la llengua i la literatura ja hem vist l'important paper que va tenir en la història de la llengua i la cultura catalanes. A més, es pot treballar la particular ortografia de la traducció al català, ja que és anterior a les *Normes ortogràfiques* de 1913, fent servir l'edició facsímil que en va fer la Diputació de Barcelona l'any 1982 per commemorar la celebració del primer centenari de la mort del gran naturalista britànic (Darwin, 1982). També es poden usar fragments de l'original anglès per a fer exercicis en aquesta llengua. Per altra banda trobem alguns llibres de la literatura catalana relacionats amb el viatge, com el relat de Josep Pla *Un senyor de Terra del Foc*, també relacionat amb aquest relat el llibre de Xavier Moret, *El català de Terra del Foc*, o la novel·la científica per a adolescents escrita per Daniel Closa, *Tots som parents*. Altres llibres relacionats amb l'obra de Darwin poden ser, a més de tots els relats de viatges, *Las Encantadas* de Herman Melville, *El último confín de la Tierra* d'Esteban Lucas Bridges, *Tras las huellas de Darwin* de Toby Green, *Darwin y los fueguinos* de Arnaldo Canclini o *El pico del pinzón* de Jonathan Weiner, entre molts altres.

D'aquesta manera a partir del *Journal of researches* els alumnes podrien desenvolupar nombrosos temes que els permetrien avançar d'una forma més creativa en la seva formació.

## Referències bibliogràfiques

BROWNE, J. (2008), *Charles Darwin. El viatge*, València, PUV.

CAMARASA, J. M. (1982), «Introducció». A: DARWIN, Ch. (1982), *Viatje d'un naturalista al rededor del mon, fet a bordo del barco «Lo Llebrer»*, Barcelona, Diputació de Barcelona.

CAMÓS, A. (2010), «La difusió del Darwinisme en les editorials de Barcelona durant el segle XIX», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 3, (2), 131-142.

DARWIN, C. (1845), *Journal of researches into the natural history and geology of the countries visited during the voyage of H.M.S. Beagle round the world*, Londres, Murray, 2a ed.

DARWIN, C. (1921), *Diario del viaje de un naturalista alrededor del mundo*, Madrid, Espasa.

DARWIN, Ch. (1982), *Viatje d'un naturalista al rededor del mon, fet a bordo del barco «Lo Llebrer»*, Barcelona, Diputació de Barcelona.

DARWIN, C. (2008), *Autobiografia*, València, Universitat de València, Mètode.

FITZROY, R.; DARWIN, C. (1836), *A letter, containing remarks on the moral state of Tahiti, Nova Zelanda, &c. South African Christian Recorder*, [en línia] <<http://nla.gov.au/nla.obj-101253616>> [Darrer accés: 10/05/18].

## 'GANITA' I 'KUTTAKA', CÀLCUL EN LA MATEMÀTICA ÍNDIA DEL PERÍODE CLÀSSIC (400-1200)

**IOLANDA GUEVARA CASANOVA;<sup>1</sup> CARLES PUIG-PLA<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

<sup>2</sup> CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT  
POLITÀCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *Siddhantes, Aryabhata, Brahmagupta, 'Ganita', 'Kuttaka'*

### 'Ganita' & 'Kuttaka', Calculation in Indian Mathematics of the Classical Period (400-1200)

*Summary: During the 4th and 5th centuries, a remarkable mathematical activity took place in India based on the needs of astronomy produced by siddhantas. While continuing this tradition, two Indian astronomers and mathematicians, Aryabhata (476-550) and Brahmagupta (598-668), wrote their siddhantic texts, Aryabhatiya and Brahma-sputa-siddhanta. In this communication, some of the issues related to the calculation of the works of Aryabhata and Brahmagupta that can be studied for high school students are exposed to allow them to establish bridges between current methods of resolution and the ancient Indian methods (inversion method and kuttaka or sprayer) contributing in this way to the development of the competences of the mathematical field in particular the competences related to the dimension of connections and those of communication and representation.*

Key words: *Siddhantas, Aryabhata, Brahmagupta, 'Ganita', 'Kuttaka'*.

#### **La matemàtica dels 'siddhantes'**

Durant els segles IV i V es va produir a l'Índia una notable activitat matemàtica a partir de les necessitats de l'astronomia. Els astrònoms escrivien textos amb instruccions per a calcular posicions dels cossos celestes i resoldre qüestions relacionades amb el calendari, la geografia o l'astrologia (Joseph, 1996: 360).

Aquests tractats d'astronomia matemàtica s'anomenaven *siddhantes* i recollien els coneixements matemàtics de l'època amb relació a tres aspectes. La matemàti-



ca requerida per a l'astronomia predictiva, això és, per a calcular el temps, les localitzacions i les aparences de fenòmens celestes –passats o futurs– tal com s'observen des d'un lloc determinat de la Terra. La requerida per a l'astronomia computacional, és a dir, els procediments dels càlculs astronòmics en termes de la geometria dels models esfèrics, en una secció o capítol propi anomenat *gola* (esfera). I un darrer bloc, d'instrucció en el coneixement matemàtic general consistent en regles per a dur a terme les operacions aritmètiques bàsiques (*ganita* o càlcul) i també procediments per a calcular interessos sobre préstecs, o bé regles per a calcular àrees, volums o sumes de sèries (Plofker, 2009: 67-68).

Dos astrònoms i matemàtics indis, Aryabhata (476-550) i Brahmagupta (598-668), van escriure els seus textos *siddhantics*, l'*Aryabhatiya* i el *Brahma-sputa-siddhanta*, que van ser referents per als astrònoms i matemàtics posteriors. De fet, a la matemàtica índia, l'*Aryabhatiya* va tenir, en certa manera, el paper dels *Elements* d'Euclides a la matemàtica grega (Moreno, 2011: 46).

Les diferents escoles d'astronomia establien una estructura comuna per als textos *siddhantes* que seguien els seus autors. Totes incloïen en algun lloc de l'obra alguns capítols dedicats exclusivament al càlcul en sentit pròpiament matemàtic (Plofker, 2009: 72). Per exemple, en el cas del *Brahma-sputa-siddhanta*, que té 20 capítols, el capítol 12 es dedica al càlcul amb nombres (*ganita*) (Plofker: 2009, 140-149) i el capítol 18, al càlcul amb incògnites, i en particular al mètode de *kuttaka* o «polvoritzador» per a resoldre equacions indeterminades, això és amb més incògnites que equacions (Plofker: 2009, 149-157).

### Aritmètica o 'ganita'

L'*Aryabhatiya* (499) d'Aryabhata és el *siddhanta* més antic que es conserva. En aquest cas, el capítol dedicat a *ganita* o càlcul és el segon, format per 33 versos en una mètrica sànscrita nomenada *arya*. Un segle i mig després, Bhaskara I (629) escriu l'*Aryabhatiyabhasya*, un comentari en prosa sànscrita de l'*Aryabhatiya* (Keller, 2005: 279-280).

El primer vers és una salutació; el segon, una defensa de la notació posicional, i els versos següents fins al desè inclouen procediments geomètrics i aritmètics, càlcul d'àrees i volum i mètodes per extraure arrels quadrades i cúbiques. En el càlcul de l'àrea del cercle inclou dues aproximacions del nombre  $\pi$ :  $\pi = \sqrt{10}$  i  $\pi = 62832/20000$ .

Els versos de l'11 al 17 contenen càlculs de mitges cordes (el que després evolucionarà i donarà lloc al sinus) (Puig-Pla *et al.*, 2011: 53), relacions entre ombres (el que avui serien problemes pràctics de trigonometria elemental) i altres temes relacionats amb la trigonometria bàsica. El versos 18 i 19 corresponen a la suma de nombres naturals de quadrats i de cubs. Del 20 al 25, càlculs d'interessos produïts per un capital. I, finalment, del 26 al 33, mètodes de resolució d'equacions de primer grau i quadràtiques i indeterminades de primer grau (Plofker, 2009: 122-136).

L'any 628 Brahmagupta escriu *Brahma-sphuta-siddhanta* (*La doctrina de Brahma correctament establerta* o *El sistema millorat de Brahma*), un tractat d'astronomia matemàtica. En cert sentit és una rèplica a l'obra *Aryabhatiya* d'Aryabhata. Bastants anys després escriu el *Khanda-khadyaka*, als 67 anys, un *karana* o manual d'astronomia matemàtica. A diferència dels *siddhantes*, que es consideraven tractats molt complets d'astronomia, els *karana* eren textos més curts i simplificats. Es caracteritzaven per fer els càlculs astronòmics no a partir de l'any zero, en què cada escola situava l'origen del món, sinó en referència a algun any corresponent a la vida de l'autor del manual. Això simplificava força els càlculs a l'hora de fer prediccions les astronòmiques (previsió d'un eclipsi) o astrològiques

més comunes i quotidianes (determinar el millor dia per a contraure matrimoni) (Plofker, 2009: 105).

La distribució dels temes dins del *Brahma-sphu a-siddhanta* és diferent de la que havia utilitzat Aryabhata però també conté un capítol dedicat a *ganita* o càlcul. Brahmagupta dedica els 10 primers capítols als temes bàsics d'astronomia: longituds mitjanes dels planetes; longituds verdaderes dels planetes; els problemes de la rotació diürna; eclipses lunars; eclipses solars; sortides i postes del Sol; les fases de la Lluna; l'ombra de la Lluna; les conjuncions dels planetes entre si, i conjuncions dels planetes amb les estrelles fixes. El capítol 11 el dedica a la crítica de l'*Aryabhatiya*. El 12, a l'aritmètica o *ganita*. Del 13 al 17, a d'altres temes relacionats amb astronomia que necessitaran el càlcul amb incògnites que desenvoluparà en el capítol 18. L'obra finalitza al capítol 21 amb la construcció d'una taula de sinus.

El capítol 12, aritmètica o *ganita*, conté 66 versos de càlcul amb nombres (Plofker, 2007: 421-428; Plofker, 2009: 140-149). En el primer vers, a l'estil de l'època i també com havia fet Aryabhata, inclou una salutació: «Qui coneix per separat les vint operacions començant per la suma, i els vuit procediments acabant amb les ombres, és un matemàtic».

Les vint operacions que van apareixent al llarg del text són la suma i la resta (1-2); la multiplicació i la divisió (3-4); elevar al quadrat i fer l'arrel quadrada (5-6); elevar al cub i fer l'arrel cúbica (7-8); reduir fraccions per cinc mètodes diferents (9-13); la regla de tres i la regla de tres inversa (14-15); quatre regles amb proporcions, de la regla de cinc a la regla d'onze (16-19), i mescles o intercanvis (20).

En el vers 7 el procediment d'elevar al cub el descriu així: «S'estableix el cub de l'últim dígit,<sup>1</sup> el quadrat de l'últim dígit multiplicat per tres i pel dígit anterior, i el quadrat del dígit anterior multiplicat per l'últim dígit i per 3, i el cub del dígit anterior. Després se sumen aquestes quantitats i s'obté el cub». En el cas del cub de 74, seria:

Les operacions	Les instruccions del vers 7
3 4 3 = 7 <sup>3</sup>	S'estableix el cub de l'últim dígit
5 8 8 = 3 · 4 · 7 <sup>2</sup>	el quadrat de l'últim dígit multiplicat per tres i pel dígit anterior
3 3 6 = 3 · 7 · 4 <sup>2</sup>	i el quadrat del dígit anterior multiplicat pel darrer dígit i per 3
6 4 = 4 <sup>3</sup>	i el cub del dígit anterior.
4 0 5 2 2 4 = (74) <sup>3</sup>	Després se sumen aquestes quantitats i s'obté el cub.

Que és el desenvolupament de  $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$  per al cas concret de  $(7 \cdot 10 + 4)^3 = 7^3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot 10^2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 4^2 + 4^3$ . Cal apreciar que aquest desenvolupament és fruit de la notació posicional i de treballar en base 10 (Guevara & Puig, 2017: 67).

Pel que fa als vuit procediments descrits en el primer vers són els següents: mixtures o anàlisi de combinacions de quantitats (1), sèries (2), figures (geometria) (3), excavacions o volums (4), piles o

1. Els indis van preferir a l'inici escriure els nombres amb les unitats d'ordre menor a l'esquerra i procedien, en fer operacions (suma, multiplicació...) d'esquerra a dreta.

càlculs d'objectes apilats (5), serrar o càlculs relatius a la fusta (6), munts o càlculs relatius a monticles de grans (7), ombres de gnòmons (8) (Plofker, 2009: 140-149).

### 'Kuttaka' o «polvoritzador»

Des de l'antiguitat, els matemàtics indis i xinesos tenien especial interès per a trobar solucions enteres a les equacions diofàntiques que tenen la forma  $ax + by = c$  (la solució de la qual es coneix generalment com el teorema del residu xinès). En general una equació diofàntica és una equació amb coeficients enters de dues o més incògnites, de la qual es busquen solucions enteres.

Aryabhata formula per primera vegada un procediment per a resoldre una equació indeterminada, és a dir amb més incògnites que equacions, el que es coneix com a mètode de *kuttaka* o polvoritzador.

En el comentari de Bhaskara sobre l'*Aryabhatiya* apareix el problema següent: «Trobar el nombre que dona 5 com a residu quan es divideix per 8; 4 com a residu quan es divideix per 9, i 1 com a residu quan és divideix per 7».

Es tracta, doncs, de trobar  $N$ , que compleix:

$$N = 8x + 5 = 9y + 4 = 7z + 1$$

Aquesta expressió, en nomenclatura actual (és a dir, en termes d'aritmètica modular), equivaldria a dir:

$$N = 5 \pmod{8} = 4 \pmod{9} = 1 \pmod{7}$$

Resulta que el valor més petit per a  $N$  és 85. En general, les equacions diofàntiques poden ser notablement difícils. El mètode de Aryabhata per a resoldre aquest tipus de problemes es coneix com el mètode de *kuttaka*. *Kuttaka* és una paraula que procedeix de *kutt* («moldre, triturar o polvoritzar») i significa «polvoritzar» o «trençar en trossets»; el mètode involucra un algorisme recursiu per a escriure els factors originals en nombres més petits, i es va convertir en el mètode estàndard per a resoldre les equacions diofàntiques de primer ordre en la matemàtica índia. En l'actualitat, aquest algorisme, elaborat per Bhaskara al segle VII, és el mètode estàndard per a resoldre equacions diofàntiques de primer ordre i de vegades s'anomena «l'algorisme d'Aryabhata» (Guevara & Puig, 2017: 53-54).

També Brahmagupta en el *Brahma-sphu a-siddhanta* tracta aquest tema. En el capítol 18, dedicat al càlcul amb incògnites, exposa diferents mètodes per a resoldre equacions i sistemes de primer i de segon grau, determinats i indeterminats (Plofker, 2007: 421-428; Plofker, 2009: 149-157). Així, en els primers versos del capítol diu: «Un mestre [*acarya*] entre els que coneixen els tractats es caracteritza per conèixer el polvoritzador, el zero, les [quantitats] positives i negatives, incògnites, eliminació del [terme] mitjà, [solució de l'equació de segon grau], color-únic, [equacions amb una sola incògnita], producte d'incògnites, així com la naturalesa quadràtica [problemes amb equacions indeterminades de segon grau]».

Després de fer les anteriors recomanacions generals, introdueix el que potser és un dels aspectes més rellevants per innovador de l'obra de Brahmagupta, l'aritmètica dels nombres positius, negatius i el zero. Convé aclarir que Brahmagupta parla de «béns» (*dhana*), de «deutes» (*rina*) i del «no-res»

(*kham*) però que si traduïm «béns» «deutes» i «no-res» per «nombre positiu», «nombre negatiu» i «zero» podem concloure que els matemàtics indis coneixien en aquesta època la famosa «regla dels signes» (Ifrah, 1997: 989).

Caldrà esperar uns quants segles perquè aquestes regles de càlcul que avui ens semblen tan quotidianes arribin a la matemàtica occidental, a través del *Liber Abaci* (1202) de Leonard de Pisa (Fibonacci) (Guevara & Puig, 2017: 148).

Els versos del 43 al 59 es refereixen a tècniques i exemples per a resoldre equacions amb una incògnita, tant de primer com de segon grau.

En el cas de les de segon grau, quan un múltiple  $b$  de la incògnita sumat amb un múltiple  $a$  del quadrat de la incògnita és igual a un nombre  $c$ :

$$ax^2 + bx = c$$

L'algorisme de càlcul es dirigeix a «eliminar el terme del mig», és a dir, el terme en  $x$ , i poder acabar el procediment fent una arrel quadrada. En notació actual seria (Guevara & Puig, 2017: 76):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= c \\ ax^2 + \frac{bx}{a} &= \frac{c}{a} \\ x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{4ac + b^2}{4a^2} \\ x + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{4ac + b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4ac + b^2}}{2a} \end{aligned}$$

Si ens centrem en el mètode anunciat del polvoritzador o *kuttaka*, el procediment consisteix a fer una sèrie de passos successius per transformar una equació amb més d'una incògnita en una altra de més simple i resoluble amb més facilitat. Així, per exemple, i en la nostra notació, donada una equació amb dues incògnites — $x, y$ —,  $ax + c = by$ , en la qual  $a$  i  $b$  no tenen divisors comuns, mitjançant un canvi de variable, es transforma l'equació inicial en una altra d'equivalent, fins a aconseguir una equació que tingui un dels coeficients igual a 1. A partir d'aquí es reconstrueixen les solucions i les equacions intermèdies fins a arribar a l'equació inicial.

Per començar es divideix el més gran dels coeficients (suposem que sigui  $a$ ) pel més petit ( $b$ ) de l'equació inicial  $ax + c = by$ , així es té un quocient  $q$  i un residu  $r$  tals que:  $a = bq + r$ ; a partir d'aquí es fa el canvi  $y = qx + u$  i se substitueix a l'equació inicial  $(bq + r)x + c = b(qx + u)$ .

Eliminant els termes iguals a les dues bandes de l'equació s'obté l'equació  $rx + c = bu$ , i com que  $r < b < a$ , la nova equació és més senzilla que la inicial. El procés es repeteix fins que uns dels coeficients és igual a 1.

Desenvolupem un exemple:

$$29x + 4 = 8y \quad (1),$$

si dividim el coeficient més gran entre el més petit obtenim:  $29 = 8 \cdot 3 + 5$ , aleshores pertoca fer el canvi  $y = 3x + u$ , que porta a l'equació  $(8 \cdot 3 + 5)x + 4 = 8(3x + u)$ , i simplificada a:

$$5x + 4 = 8u \quad (2).$$

Es comença de nou el procés. Es divideix el coeficient més gran pel més petit i s'obté:  $8 = 5 \cdot 1 + 3$ , i es fa el canvi  $x = u + v$ , que porta a l'equació  $5(u + v) + 4 = 8u$ , i simplificada a:

$$5v + 4 = 3u \quad (3).$$

Per tercera vegada es repeteix el procés:  $5 = 3 \cdot 1 + 2$ , el canvi ara és  $u = v + w$ , i la nova equació  $(3 \cdot 1 + 2)v + 4 = 3(v + w)$ , que simplificada és la quarta equació:

$$2v + 4 = 3w \quad (4).$$

Per quarta vegada es repeteix el procés:  $3 = 2 \cdot 1 + 1$ , el canvi ara és  $v = w + t$ , i la cinquena equació:

$$2t + 4 = w \quad (5).$$

S'ha arribat a la fi del procés perquè s'ha aconseguit que el coeficient d'una de les incògnites sigui 1.

Llavors, es dona a l'altra incògnita un cert valor i es refà el camí en sentit contrari, això és: si  $t = 0$ , aleshores,

$$w = 4, \text{ segons la cinquena equació (5)}$$

$$v = 4, \text{ segons la quarta equació (4)}$$

$$u = 8, \text{ segons la tercera equació (3)}$$

$$x = 12, \text{ segons la segona equació (2)}$$

$$y = 44, \text{ segons l'equació inicial (1)}$$

Si es necessita la solució més petita possible, es divideix 12 per 8 (el coeficient de la  $y$ ) i 44 per 29 (el coeficient de la  $x$ ), divisions que donen els residus 4 i 15, respectivament. És a dir:

$$12 = 8 \cdot 1 + 4$$

$$44 = 29 \cdot 1 + 15$$

Aquests residus, 4 i 15, són la solució buscada. Així, un cop es té una solució particular, és fàcil comprovar que les altres provenen de les relacions següents:

$$x = 8m + 4 \quad y = 29m + 15 \quad (\text{Nolla, 2006; Moreno, 2011: 47-50}).$$

### Consideracions finals

En els darrers versos del capítol 18 Brahmagupta destaca la importància de dominar tots aquests tipus de càlculs: «Amb el que aquí s'ha explicat, un matemàtic podrà resoldre qüestions plantejades en altres treballs. En les assemblees de la gent podrà destruir la lluentor d'altres astrònoms com el Sol destrueix la lluentor d'altres estels.»

Al segle XXI, les motivacions dels matemàtics i dels seus alumnes poden ser ben bé unes altres, però saber d'on venen els coneixements matemàtics actuals, quines persones i en quin lloc els van desenvolupar, forma part del bagatge cultural que es fomenta dins d'una educació matemàtica entesa en sentit més ampli.

Així, treballar a l'aula algunes qüestions del càlcul de les obres d'Aryabhata (*Aryabhatiya*) i Brahmagupta (*Brahma-sputa-siddhanta*) amb els alumnes de secundària o d'universitat pot fer establir ponts entre els mètodes de resolució actuals i els antics mètodes indis (mètode d'inversió i *kuttaka* o polvoritzador).

En aquest sentit es fomenta el desenvolupament de diverses competències de l'àmbit matemàtic, les referides a la dimensió de connexions i les de comunicació i representació, així com les de l'àmbit digital si es compaginen les resolucions manuals amb les que poden oferir diferents programes, com ara GeoGebra o Matlab.



## Referències bibliogràfiques

GUEVARA, I.; PUIG, C. (2017), *Brahmagupta. El àlgebra de las estrellas*, Barcelona, RBA.

IFRAH, G. (1997), *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa-Calpe.

JOSEPH, G. G. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide.

KELLER, A. (2005), «Making diagrams speak, in Bhaskara I's commentary on the *Aryabhatiya*», *Historia Mathematica*, 32, 275-302.

MORENO, R. (2011), *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara. Tres matemáticos de la India*, Madrid, Nivola.

NOLLA, R. (2006), *Estudis i activitats sobre problemes clau de la història de la matemàtica*, Barcelona, Publicacions de la SCM, IEC.

PLOFKER, K. (2007), «Mathematics in India». A: KATZ, V. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook*, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 385-514.

PLOFKER, K. (2009), *Mathematics in India*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.

PUIG-PLA, C.; GUEVARA, I.; ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2011), «La trigonometria a la matemàtica de l'Antiga Índia. Algunes idees per treballar a l'aula». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica - Institut d'Estudis Catalans, 53-60.

## EL CàLCUL DIFERENCIAL AL SEGLE XVIII EN UNA CLASSE DE MATEMÀTIQUES

**JOAQUIM BERENGUER**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.<sup>1</sup>

Paraules clau: Cerdà, fluxió, càlcul diferencial i integral, segle xviii

### Teaching Eighteenth Century Fluxional Calculus in a Mathematics Class

Summary: *The aim of this work is to provide some tools with which the introduction of concepts into modern Differential Calculus became easier. Specifically, we would like to show the usefulness of the concept of fluxion as an historical tool, where geometrical and kinematical aspects are relevant, for introducing the concept of derivative. We wish to explain how two well-known problems, calculus of maxima and minima and drawing of a tangent, were solved in the beginning of Differential Calculus. In particular, we show how the Catalan mathematician Tomàs Cerdà (1715-1791) presents the idea of maxima and minima in his *Tratado de Fluxiones* and also how he connects a tangent to a curve with the fluxion of the variable involved in its equation.*

Key words: Cerdà, fluxion, differential and integral calculus, 18th century

### Introducció

La introducció a l'ensenyament secundari del càlcul diferencial al voltant del concepte de derivada sempre ha estat un moment particularment important en el procés d'aprenentatge de l'alumne. Recuperar reflexions i presentacions que s'havien donat als inicis del càlcul diferencial en el segle XVIII pot ser una eina molt útil en mans dels ensenyants. Explicar, a classe, com els matemàtics del segle XVIII van introduir conceptes com els de *diferencial* o *fluxió*, quan aquest càlcul encara no havia estat dotat de tot el rigor matemàtic posterior però ja evidenciava el lligam que hi havia entre els nous conceptes i les propietats de les corbes o del moviment

---

1. Projecte de recerca 2016: «Matemáticas e ingeniería: nuevas perspectivas críticas (siglos xvi-xx)». Universitat Politècnica de Catalunya, HAR2016-75871-R.

dels cossos, pot resultar una manera que els alumnes entenguin millor la necessitat d'aquest nou càlcul. Per altra banda, presentar als alumnes els antecedents històrics del concepte de *derivada* és una forma d'avançar cap a una imatge dinàmica de la ciència, com una activitat humana en un determinat moment històric i en una determinada societat, ben allunyada de tot immobilisme i atemporalitat.

Amb aquest treball pretenem proporcionar algunes eines que puguin facilitar la introducció dels conceptes moderns en el càlcul diferencial actual. Concretament es tracta de mostrar la utilitat del concepte de *fluxió* com a eina històrica, on els aspectes geomètric i cinemàtic són determinants per tal d'introduir la definició del concepte de derivada. Ens proposem exposar com es resolien, en els inicis del càlcul diferencial, dos problemes ben coneguts pels alumnes: el càlcul de màxims i mínims d'una funció i la relació de la tangent a una corba amb la derivada de l'equació d'aquesta corba. Concretament mostrarem com Tomàs Cerdà (1715-1791), un matemàtic català, introdueix en el seu *Tratado de Fluxiones*<sup>2</sup> la noció de màxim i mínim d'una funció i com relaciona la tangent a una corba amb les fluxions de les variables que intervenen en la seva equació. Aquests dos exemples permetran a Cerdà explicar la noció de fluxió, comparant-la amb conceptes moderns com els de *derivada* o *diferencial*.

### La fluxió segons Cerdà

Segons la visió newtoniana,<sup>3</sup> adoptada per Cerdà, tota magnitud geomètrica (línia, superfície o volum) es considera formada pel moviment d'una altra magnitud (punt, línia o superfície). De manera que una línia és generada per un punt en moviment; una superfície, pel moviment d'una línia, i un cos, pel moviment d'una superfície. La forma de mesurar el creixement o el decreixement de la magnitud, anomenada «fluent», està estretament lligada a la «velocitat» d'aquest creixement o decreixement i, segons Cerdà, la fluxió és l'increment finit d'aquesta fluent en un punt donat, si considerem que la velocitat de creixement (o decreixement) es manté constant a partir d'aquest punt.

Per exemple, en el cas de la fluxió d'una superfície curvilínia tindrem que la superfície *ACD* (fig. 1) està generada pel desplaçament de la recta que conté el segment *CD* paral·lelament a ella mateixa. Si se suposa que la velocitat de creixement de l'àrea s'ha de mantenir constant a partir d'una posició determinada, l'increment d'aquesta àrea serà el rectangle *CcdD* –ja que la longitud *CD* s'ha de mantenir constant– per un determinat increment *Dd*.

Per a Cerdà l'increment de l'abscissa *Dd* és *dx* i, si *AD = x* i *CD = y*, es tindrà que la fluxió de *ACD* serà *ydx*, és a dir, l'àrea del rectangle *CcdD*.

Avui dia, si anomenem *S* la funció que ens dona la superfície *ACD* i *y* és la funció que correspon a la corba, a partir del teorema fonamental del càlcul podríem escriure  $dS = ydx$ . Amb això observem la coincidència amb el resultat de Cerdà, i, per tant, que la fluxió introduïda per aquest autor s'aproxima a la noció actual de diferencial.

2. El *Tratado de Fluxiones* de Cerdà és una adaptació de *The Doctrine and Application of Fluxions* (1750) del matemàtic britànic Thomas Simpson (1710-1761).

3. Es pot analitzar la concepció newtoniana del càlcul diferencial a partir de textos originals del mateix Isaac Newton (1642-1727), com és el *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (1671). I també a partir de nombrosos historiadors que han estudiat el càlcul fluxional newtonià com Niccolò Guicciardini amb el seu llibre *Isaac Newton on mathematical certainty and method* (2009), entre d'altres.

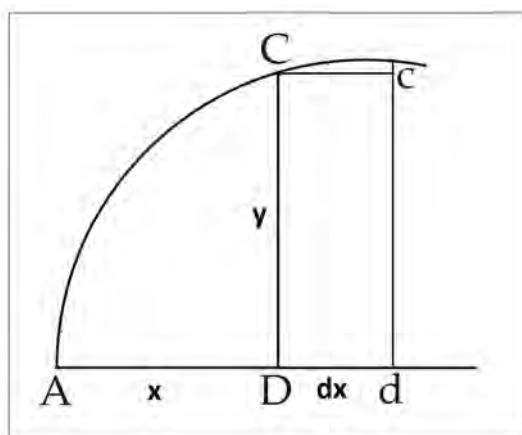


FIGURA 1. Fluxió d'una superfície curvilínia

### La derivada i la fluxió

L'anterior resultat porta a la conclusió que la noció de Cerdà coincideix amb el nostre concepte de diferencial i que, en canvi, l'actual derivada s'aproximaria més a una raó de fluxions.

Efectivament, si es volgués calcular la derivada d'una funció determinada, com per exemple la següent:  $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ , aplicariem les regles de derivació prèviament apreses i es tindria:  $y' = 3x^2 + 4x - 3$ .

Cerdà quasi operaria de la mateixa manera, però aplicaria la definició de fluxió i les regles, també prèviament deduïdes, als dos termes de la igualtat:

$$dy = 3x^2 dx + 4x dx - 3 dx$$

De manera que la nostra derivada vindria donada per la raó de les fluxions:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 3$$

De fet, Cerdà mateix reconeix que el que interessa és la raó de les fluxions, particularment si es té en compte que  $dx$  coincideix amb un increment constant de la variable  $x$ , ja que gairebé sempre considera el moviment de  $x$  uniforme.

### Màxims i mínims d'una funció

En la introducció del capítol 5 del *Tratado de Fluxiones* de Cerdà, l'autor explica que un màxim o mínim d'una funció és el punt on la «quantitat» que estava creixent deixa de créixer o viceversa. A continuació, Cerdà justifica que en un màxim o mínim la fluxió –estretament relacionada amb la velocitat de creixement (decreixement)– ha d'anul·lar-se, justament a partir de la idea que la quantitat que estava creixent (decreixent) en el punt considerat deixa de créixer (decréixer):

Como quando una cantidad variable llega a ser máxima ya no puede aumentarse más, su fluxión en este punto será = 0. Mas quando la Cantidad variable llega a ser mínima ya no puede disminuirse más, su Fluxión disminuyendo también debe ser = 0, luego en aquellos puntos en que la Fluxión de la variable es = 0, la tal Cantidad será un máximo o un mínimo; (Cerdà, 1757-1759: f. 3r.)

Per saber si en un punt  $a$  la variable té un màxim o un mínim, Cerdà estableix com a criteri l'estudi del signe de la fluxió de la variable a les «proximitats» de  $a$ . I, sense més justificació, considera que quan la variable creix la seva fluxió serà positiva mentre que quan decreix la fluxió serà negativa:

Para discernir determinadamente si la Fluente es un *Máximo* o un *Mínimo* hay una Regla infalible, y es examinar si el valor de la Fluxión un poco antes de llegar a ser  $= 0$  es *positivo* o es *negativo*. Si la Fluxión es cantidad positiva, la Fluente que se le sigue, hecha la Fluxión igual a 0, es un *Máximo*, si la fluxión es cantidad negativa, la Fluente es un *Mínimo*, porque mientras una cantidad va creciendo, su Fluxión es positiva, y mientras va disminuyendo, su Fluxión es negativa. (Cerdà, 1757-1759: f. 15r.)

Per a un dels exemples que pren on la funció és  $3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48b^4$  en calcula la fluxió  $12x^3 dx - 84ax^2 dx + 168a^2 x dx - 96a^3 dx = 12dx \times (x - a) \times (x - 2a) \times (x - 4a)$ . Els valors pels quals la fluxió s'anul·la són  $a$ ,  $2a$  i  $4a$ , per tant, en aquests valors la funció (fluent) pot tenir algun màxim o mínim, i a partir d'aquí Cerdà inicia l'estudi del signe de la fluxió en les proximitats de cada un d'aquests tres valors:

Siendo esta Fluente variable, mientras  $x$  se mantiene  $< a$ , la Cantidad  $(x - a)(x - 2a)(x - 4a)$  es negativa, por ser un producto de tres Factores negativos, por consiguiente aún multiplicada por  $+12dx$ , será negativa y así la Fluxión de toda la Cantidad es a saber  $12dx \times (x - a) \times (x - 2a) \times (x - 4a)$  es negativa y la Fluente que le sigue, cuando llega a ser  $x = a$ , O, lo que es lo mismo  $x - a = 0$ , será un *Mínimo*. (Cerdà, 1757-1759: f. 15v.)

I continua, de la mateixa manera per a la resta de valors  $2a$  i  $4a$ .

En un altre exemple on la funció és  $24a^3 x - 30a^2 x^2 + 16ax^3 - 3x^4$  i la seva fluxió  $24a^3 dx - 60a^2 x dx + 48ax^2 dx - 2x^3 dx = 12dx \times (a - x) \times (a - x) \times (2a - x)$ , mostra com, a partir de l'estudi del signe de la fluxió, en algun punt on aquesta s'anul·la pot no haver-hi ni màxim ni mínim:

[...] la fluente que resulta cuando  $x=a$  ni es máxima ni mínima, porque tomado  $x$  un poco *menor* que  $a$ , y un poco *mayor* que  $a$ , siempre la fluxión es positiva, por ser en el primer caso entrambos factores  $a-x$ ,  $a-x$ , positivos y en el segundo entrambos negativos y siempre la fluxión positiva, por consiguiente cuando  $x=a$ , la fluente ni es máxima ni es mínima, entendido este máximo y mínimo según la definición que dimos, esto es que acabado de crecer la variable disminuirá. (Cerdà, 1757-1759: f. 105.)

Cerdà il·lustra aquest cas amb la gràfica de la funció que coincideix amb la que apareix en el text de Simpson (fig. 2).

Cerdà explica com en l'abscissa  $a = AB$  la corba, tot i que la fluxió s'anul·la, tant a l'esquerra com a la dreta de  $a$ , l'ordenada no deixa de créixer. El desenvolupament de Cerdà per tractar el tema dels màxims i mínims d'una funció és, doncs, de plena actualitat i els seus exemples poden servir directament com a exercicis per a explicar els criteris per distingir quan una funció té un màxim o un mínim. El darrer exemple donat per Cerdà, a més, pot servir per a introduir el punt d'inflexió d'una corba.

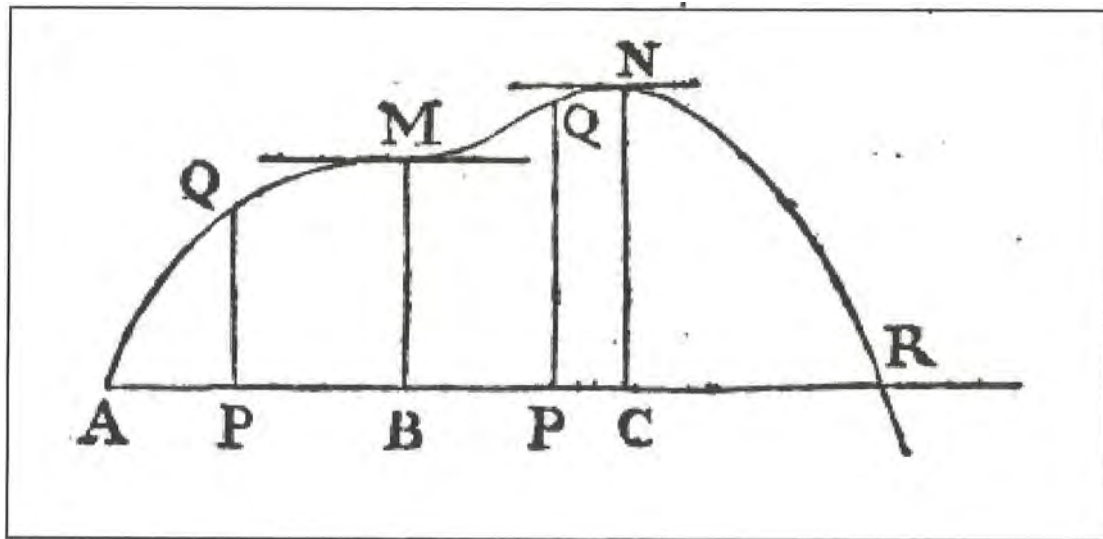


FIGURA 2. Criteris per a distingir màxims i mínims

**La tangent a una corba**

El capítol 6 del *Tratado de Fluxiones* de Cerdà està dedicat a explicar la relació entre les fluxions d’unes variables i la tangent a la corba que representen aquestes variables.

Per dibuixar una tangent a una corba, el que cal és trobar un altre punt, a més del de tangència. Calculant  $mB$ , anomenada subtangent, on  $m$  és l’abscissa del punt  $D$  de tangència, aconseguirem aquest altre punt  $B$ .

Una corba  $ADF$  és vista com a generada per dos moviments. Al mateix temps que la recta  $mn$  es mou paral·lelament a ella mateixa el punt  $p$  es mou sobre la recta  $mn$  i la combinació dels dos moviments genera la corba (fig. 3).

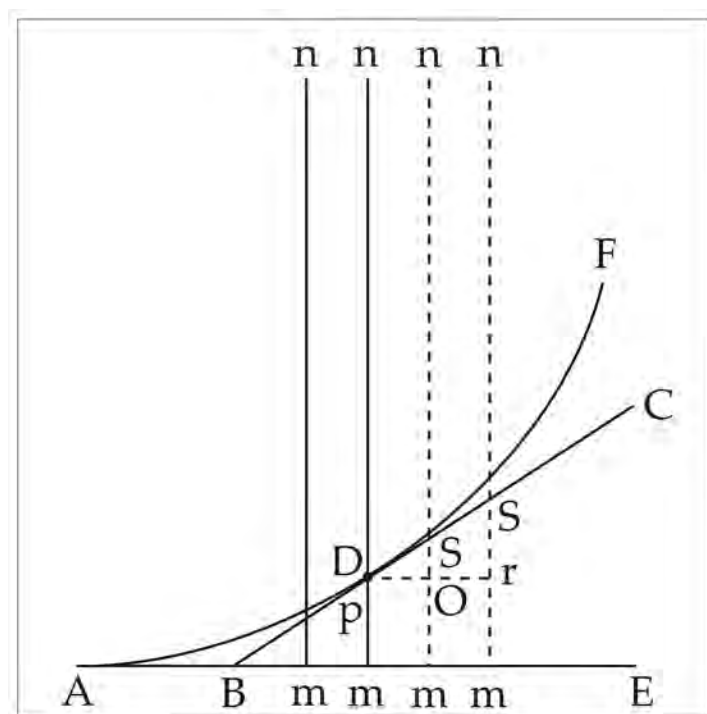


FIGURA 3. Tangent per sota d’una corba



La corba, per tant, quedarà determinada per dues variables que Cerdà anomena  $Am = x$  i  $pm = y$ . La fluxió d' $Am$ , en el punt  $D$ , és a dir  $dx$ , la representa per  $Dr$ , que ve donada per la velocitat a la qual es mou la recta  $mn$  en el punt  $D$ . La fluxió de  $pm$ , en el punt  $D$ , és dir  $dy$ , la representa per  $rS$ , que ve donada per la velocitat del punt  $p$  sobre la recta  $mn$ . Aleshores considera la recta  $SD$ , que tallarà l'eix  $AE$  en el punt  $B$ .

Cerdà considera, d'entrada, el moviment de la recta  $mn$  uniforme i, per tant,  $dx$  és constant per un interval de temps determinat. En canvi, el moviment del punt  $p$  pot ser accelerat o desaccelerat. Cerdà argumenta que si el moviment del punt  $p$  fos també uniforme, aquest es trobaria sobre la recta  $SD$ , ja que  $Dr$  i  $rS$  serien les distàncies recorregudes pel moviment de la recta  $mn$  i pel punt  $p$  respectivament en un mateix interval de temps. Efectivament, si els dos moviments fossin uniformes, la raó entre les distàncies  $Dr$  i  $rS$ , o  $DO$  i  $OS$ , recorregudes per aquests, es mantindria constant i el resultat de la combinació dels dos moviments coincidiria amb la recta  $SD$ . En canvi, si el moviment de  $p$  sobre la recta  $mn$  és accelerat l'espai realment descrit serà més gran que el descrit amb un moviment uniforme i el moviment resultant del punt  $p$  descriurà una corba per sobre la recta  $BC$ , que correspon al d'un moviment uniforme (fig. 3). Si el moviment de  $p$  sobre la recta  $mn$  és desaccelerat, l'espai realment descrit serà més petit que el descrit amb un moviment uniforme i el moviment resultant del punt  $p$  descriurà una corba per sota la recta  $BC$  (fig. 4). Però, en qualsevol cas, la corba sempre «quedarà a una banda» de la recta  $BDC$ , de manera que aquesta és la tangent a la corba en el punt  $D$ . Cerdà, en aquest punt, no té en compte la possibilitat que en el punt  $D$  hi hagués una inflexió, és a dir que el moviment del punt  $p$  passés de ser accelerat a desaccelerat o a l'inrevés.

En resum, Cerdà, d'aquesta manera, arriba a la conclusió que la recta que passa pel punt  $D$ , construïda a partir de les fluxions de les dues variables que defineixen la corba –de fet la recta té per pendent la raó entre aquestes fluxions–, és la tangent a aquesta. Tot i que Cerdà, en aquest apartat, no parli de la concavitat d'una corba, està clar que el seu raonament està estretament relacionat amb aquest concepte i el seu discurs pot facilitar la introducció d'aquest concepte a la classe.

A partir d'aquí es podrà trobar el punt  $B$ , que permetrà dibuixar la tangent. Efectivament, els triangles  $SrD$  i  $DmB$  són semblants i, per tant, es tindrà:  $\frac{Sr}{rD} = \frac{Dm}{mB}$  o sia:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{mB}$ , d'on  $mB = \frac{ydx}{dy}$ .

Adaptant el raonament de Cerdà als conceptes i notació actuals, es podria considerar, en un punt d'una corba, construir la recta que té per pendent la derivada de la funció en aquest punt i, un cop dibuixada, comprovar que aquesta recta és la tangent a la corba en aquest punt, és a dir que la corba «queda a una banda» de la recta en les «proximitats del punt».

Quan Cerdà analitza si el moviment de l'ordenada s'accelera respecte al de l'abscissa, equival a analitzar el comportament de la funció derivada, és a dir, preguntar-se sobre el seu creixement o decreixement –sobre el signe de  $y'$ . Si la funció derivada és creixent, significa que per un mateix interval de temps l'increment real de l'ordenada  $y$  serà superior que el que es produeix sobre la recta que té per pendent el valor de la derivada en el punt considerat (fig. 5), és a dir, per a l'increment  $x - a$  entre els punts  $B$  i  $C$  es tindrà:  $y_2 - b > y_1 - b$ .

Per tant, la corba estarà per sobre de la recta. I si  $y'$  és decreixent a l'inrevés. Entre altres coses, això permet relacionar la concavitat de la corba amb el signe de la  $y'$ . Com també permet ampliar el raonament de Cerdà amb el cas que en el punt considerat hi hagi una inflexió.

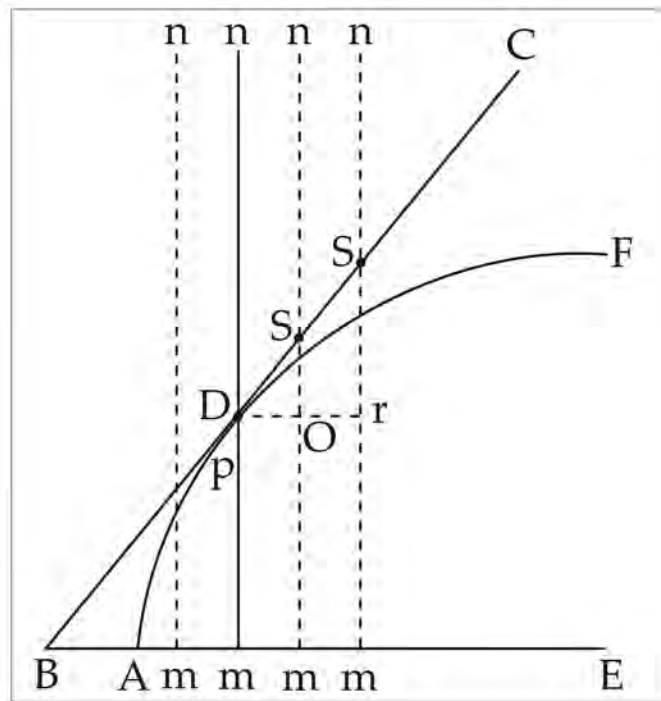


FIGURA 4. Tangent per sobre d'una corba

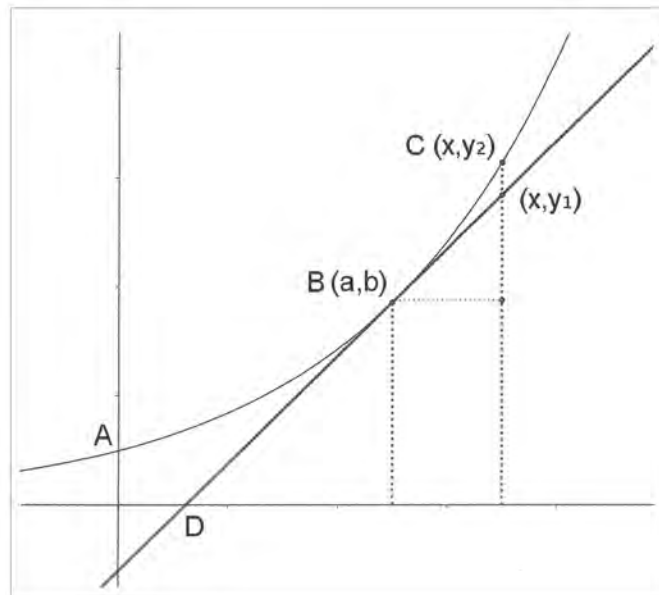


FIGURA 5. La tangent a una corba i la seva derivada

### Algunes reflexions finals

Pensem que, efectivament, el concepte de *fluxió*, sota una visió geomètrico-cinemàtica, introduït per Cerdà pot ajudar els alumnes entendre millor la noció actual de derivada. Per altra banda, el discurs de Cerdà manté plena actualitat, particularment quan tracta el tema de màxims i mínims. Però és clar que no es poden donar receptes de com utilitzar aquestes eines històriques a la classe, sinó que, simplement, es mostren exemples que, tot i correspondre a moments històrics on no estaven clars ni el

concepte de *funció* ni el de *límit*, poden donar elements a l'ensenyant per utilitzar a la classe. Cada ensenyant hauria de veure com, segons la dinàmica de la classe, pot aprofitar aquests exercicis de Cerdà. Una possibilitat és que siguin explicats després d'haver introduït els conceptes de *derivada* i de *diferencial*, si escau. Una segona opció és explicar-los abans d'introduir el concepte de derivada actual i, en qualsevol cas, discutir les similituds i diferències entre els dos sistemes conceptuals, analitzant la relació entre els dos. Finalment, una tercera opció és que l'ensenyant reculli prèviament els elements que li semblin més suggestius del discurs de Cerdà i els incorpori a un llenguatge i una notació moderns.

## Referències bibliogràfiques

- BERENGUER, Joaquim (2015), *Cerdà (1757-1759). Tratado de Fluxiones*, Barcelona, Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona; amb el suport del projecte HAR2013-44643-R (Ministerio de Economía y Competividad) i del projecte SGR (grup de recerca consolidat) HIS-STM (SGR 1410), [en línia] <[http://ccuc.cbuc.cat/search~S20\\*sp?/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&SUBKEY=Cerd%C3%A0/1%2C23%2C23%2CB/frameset&FF=XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&3%2C3%2C](http://ccuc.cbuc.cat/search~S20*sp?/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20/XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&SUBKEY=Cerd%C3%A0/1%2C23%2C23%2CB/frameset&FF=XCerd{u00E0}&SORT=D&searchscope=20&3%2C3%2C)>
- BERENGUER, Joaquim (2016), *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*. Tesi doctoral en Història de la Ciència dirigida per la doctora M. Rosa Massa Esteve. Universitat Autònoma de Barcelona, [en línia] <<http://www.tdx.cat/handle/10803/367217>
- <<https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1211406>>
- CERDÀ, Tomàs (1757-1759), *Tratado de Fluxiones*, RAH, Cortes 9/2792, 9/2812.
- GUICCIARDINI, Niccolò (2009), *Isaac Newton on mathematical certainty and method*, Cambridge, Massachusetts, Londres, The MIT Press.
- NEWTON, Isaac (1671), *The Method of Fluxions and Infinite Series*, translated from the Author's Latin original [*Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum*] not yet made public [...] by John Colson, M. A. and F. R. S. Londres, printed by Henry Woodfall. 1736.
- SIMPSON, Thomas (1750), *The Doctrine and Application of Fluxions*, Londres, printed by J. Nourse.



## COM LES TIC PODEN AJUDAR A L'ENSENYAMENT DE LA HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA

**JOSEP MARIA PONS POBLET**

DEPARTAMENT DE RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA.  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *TIC, ensenyament, Galileu, biga, 'Discorsi'*

### How TIC Can Help in the Teaching of the History of Science

*Summary: The aim of this paper involved the thematic: History of the Sciences and Scientific Education and wished to show how to teach history of science. We show how the use of TIC helps to present students –doubtful about these types of technologies– proposals or formulations made centuries ago. This implementation can be accompanied in parallel in the classroom of the theoretical formulations of subjects such as physics, mechanics and even others, such as philosophy.*

Key words: *TIC, teaching, Galileo Galilei, beam, 'Discorsi'*

### Introducció

Pues bien, señor Salviati, allanadnos, si podéis, estos obstáculos e iluminadnos estas oscuridades, pues me parece que este asunto de las resistencias es un campo fértil en bellas y útiles especulaciones.

Y si os parece bien que sea ésta la materia de nuestros razonamientos de hoy, a mí, y creo que al señor Simplicio, nos será de grato. (Galilei, 1638: 74).

Galileu, al seu conegut *Discorsi*, introduint una breu consideració sobre la ruptura d'una biga, planteja una interessant discussió sobre la manera de treballar d'aquesta estructura. A part d'enfrontar-se amb el problema físic en si, ho feia



també amb el saber imperant del moment, això és, per un costat amb l'aristotelisme dominant i per l'altre amb el nominalisme.

L'objectiu de la present comunicació fora presentar, dins *la temàtica de les TIC en la incorporació de la història de la ciència a l'ensenyament*, com l'ús d'aquestes eines pot ajudar a mostrar a l'alumnat –acostumat sens dubte a aquest tipus de tecnologies– proposicions o formulacions fetes segles enre-re. Aquesta implementació pot anar acompanyada en paral·lel, a l'aula, de les formulacions teòriques (de pissarra) de matèries com la física, la mecànica i fins i tot d'altres com podria ser la filosofia.

En referència a la temàtica de les TIC, a la pàgina de la UNESCO podem llegir:

### **Las TIC en la educación**

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) tienen una influencia cada vez mayor en la forma de comunicarse, el aprendizaje y la vida.

El desafío consiste en utilizar eficazmente estas tecnologías para que estén al servicio de los intereses del conjunto de los estudiantes y de toda la comunidad educativa.<sup>1</sup>

Gairebé han passat quatre-cents anys des que Galileu va escriure els *Discorsi*. Per tal de presentar aquesta obra als alumnes, alhora que es mostra un dels textos clau de la història de la ciència occidental, es pretén prendre un breu text del llibre i treballar-lo a l'aula amb els alumnes de secundària. És cert que el mateix abast de l'obra fa possible que sigui tractada en gairebé totes les disciplines –malgrat que nosaltres ens basarem en l'àrea científicotecnològica. Partint d'un breu text on l'italià parla de la ruptura d'una biga, es volen introduir els conceptes de força, de deformació i de trencament, tot copsant també la influència del material. Els alumnes podran veure que allò que Galileu postulava llunyanament, ells ho poden copsar en el seu dia a dia.

Avui, sovint es parla de transversalitat dins els currículums docents. I, com veurem, aquest exemple pot ser un bon moment per a implementar-la ja que el seu estudi ens ofereix la possibilitat d'emprar eines distintes per a enfrontar-nos-hi: des de la clàssica pissarra, fins a la manipulació de materials com la plastilina, tot passant per les més variades experiències que es puguin ocórrer als docents. Ara bé, darrerament comptem amb una ajuda que cada vegada es va obrint més pas a les aules: les TIC. Aquestes, sens dubte ens ajudaran i permetran la visualització del problema plantejat per la via d'unes interfícies que, cada vegada més, els alumnes tenen com a habituals. Aquest aliat ajudarà l'alumnat a prendre consciència d'uns conceptes que, *a priori*, poden semblar una mica abstractes.

### **L'àmbit científicotecnològic**

Per tal d'implementar el que acabem d'explicitar, proposarem un exemple aplicable dins l'actual marc educatiu. En el corresponent decret<sup>2</sup> del Currículum d'Educació Secundària Obligatòria, dins l'àmbit científicotecnològic, trobem els continguts corresponents (taula 1):

Pot esdevenir una tasca difícil per al docent intentar explicitar els diferents tipus d'esforços existents en un element resistiu. Hem de tenir present que aquest, convenientment disposat i agrupat amb d'altres, pot arribar a esdevenir una estructura pròpiament dita.

1. <<https://es.unesco.org/themes/tic-educacion>>

2. Decret 187/2015 DOGC, núm. 6945 - 28.8.2015.

**Tercer curs (matèria comuna). Continguts****Estructures**

- Funció i característiques d'una estructura.
- Tipus d'estructures.
- Tipus d'esforços resistents.
- Elements i esforços estructurals d'objectes quotidians i construccions simples.
- Anàlisi d'esforços i estabilitat d'estructures mitjançant aplicacions digitals.
- Disseny, construcció i avaluació d'estructures simples.

TAULA 1. Currículum Educació Secundària Obligatoria Àmbit científicotecnològic (Part Estructures)

És ben cert que veient el material disponible tant en suport físic (llibres, apunts) com en exemples que he trobat corresponents a l'àmbit particular de la matèria Visual i Plàstica (plastilina, maquetisme), aquesta dificultat incipient pot anar fent-se cada vegada més petita, tot permetent que l'alumnat assoleixi part dels resultats desitjats.

Per altra banda, també s'ha cregut important destacar que fer un primer cop d'ull als criteris d'avaluació, disposats pel mateix Departament, ens pot ajudar a prendre consciència de dos conceptes considerats clau: la identificació dels esforços i la seva visualització amb simuladors (taula 2).

**Criteris d'avaluació**

Definir els diferents tipus d'estructures i identificar-les en objectes d'ús quotidià, indicant els tipus d'esforços a què estan sotmeses.

Emprar simuladors per a analitzar l'estabilitat d'estructures simples i analitzar els esforços a què estan sotmeses.

TAULA 2. Criteris d'avaluació<sup>3</sup>

Per tant, s'entén que un cop els diferents esforços ja han estat identificats, per exemple al grup classe, i per tant són coneguts per l'alumnat, ara ja podem entrar a la seva anàlisi a través dels simuladors. Es creu interessant remarcar que les noves tecnologies de les quals disposem (pàgines web, CD, entre d'altres), han d'ajudar a l'adquisició dels conceptes –que ha formulat el docent– per part

FIGURA 1. Exemple estudi de la tracció. Concepte<sup>4</sup>

3. Decret 187/2015 DOGC, núm. 6945 - 28.8.2015.

4. <<http://blocs.xtec.cat/tecnologiadeuseevero/2014/10/01/forces-i-estructures-unitat-3/>>



FIGURA 2. Exemple estudi de la tracció i la compressió. Simulació<sup>5</sup>

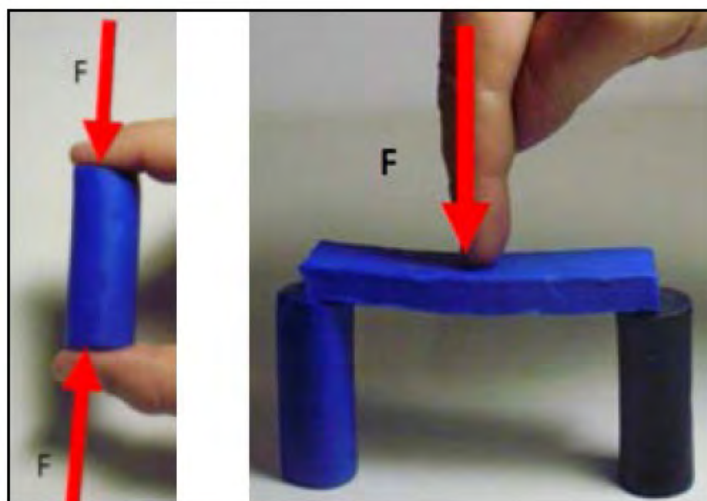


FIGURA 3. Exemples d'esforços de compressió i la flexió. Concepte<sup>6</sup>

dels alumnes que s'enfronten a unes formulacions certament complexes; però en cap cas no han de substituir-les (fig. 1 i 3). Per exemple; cal definir prèviament els conceptes que actuen en una determinada secció (o element) per tal que després la seva simulació ens sigui aclaridora (que serveixi per a refermar-los) (fig. 2 i 4).

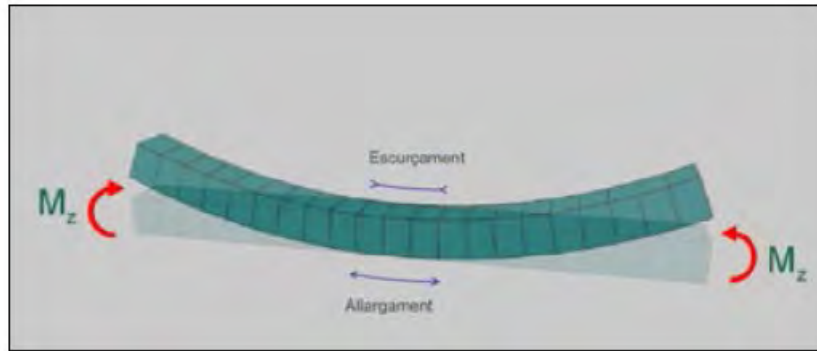
### Un exemple

Analitzem el text. El fet que la majoria de traduccions dels *Discorsi* es trobin en anglès pot ajudar a la transversalitat dins l'aula ja que, prèviament, podria ser tractat a l'assignatura de llengua estrangera com a exercici de comprensió lectora i traducció.

A large marble column was laid out so that its two ends rested each upon a piece of beam; a little later it occurred to a mechanic that, in order to be doubly sure of its not breaking in the middle by its own weight, it would be wise to lay a third support midway; this seemed to all an excellent idea; but the sequel showed that it was quite the opposite, for not many months passed before the column was found cracked and broken exactly above the new middle support. (Galilei, 1638)

5. <<https://www.upc.edu/prismatic/prismatic.html>>

6. <[http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/MA\\_practica\\_forces\\_i\\_esfor%C3%BEos.pdf](http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/MA_practica_forces_i_esfor%C3%BEos.pdf)>

FIGURA 4. Exemple d'esforç de flexió. Simulació<sup>7</sup>

Una gran columna de marbre va ser col·locada de manera que els seus extrems es recolzaven cadascun sobre un tros de biga; una mica més tard a un mecànic se li va ocórrer que, per tal d'assegurar que no es trenqués en el punt mig pel seu propi pes, seria prudent col·locar un tercer suport a la meitat; això a tothom li semblà una idea excel·lent; però els esdeveniments van mostrar just el contrari, ja que no passaren gaires mesos abans que la columna s'esquerdés i es trenqués just a sobre del nou suport.

### Plantegem el problema i la solució

Galileu formula el problema resistiu de les bigues enfrontant-se a *un camp fèrtil en belles i útils especulacions*. El geni italià vol estudiar el perquè i el com es trenca una biga. Cert és que llavors, i ara, tothom té una relativa experiència d'aquest fet. Sabem que un determinat element resistent no pot ser carregat contínuament ja que arribat un cert punt col·lapsarà. Clàssicament, part del problema se solucionava augmentant les superfícies de treball (augment de la secció) o bé treballant amb valors de tensions relativament baixos. Si bé entrariem en altres èpoques on el que es prima és el disseny geomètric front del disseny resistiu. Un bon exercici podria ser cercar-ne exemples (es pot proposar inicialment el cas d'Egipte i les seves piràmides per després passar a l'exemple de la torre Eiffel).

L'exemple del nostre cas ens pot ajudar a introduir-nos a l'estudi de les forces (i per tant a definir-ne clarament el concepte i l'abast), tot i fent veure que no és el mateix una càrrega puntual que una càrrega uniforme (com seria el pes del nostre exemple) (fig. 5). També pot servir per a introduir què s'entén per enllaç i veure quins són els principals tipus d'enllaços d'una biga amb el terra (articulacions, encastaments...).

Passem doncs a analitzar el text pas a pas, introduint alhora les consideracions convenientes, tot i tenint present que Salviati planteja el cas de la ruptura de la columna gruixuda de marbre precisament pel punt per on es va voler reforçar.

A large marble column was laid out so that its two ends rested each upon a piece of beam. (Galilei, 1638)

Una gran columna de marbre va ser col·locada de manera que els seus extrems es recolzaven cadascú sobre un tros de biga.

7. <<https://www.upc.edu/prismatic/prismatic.html>>

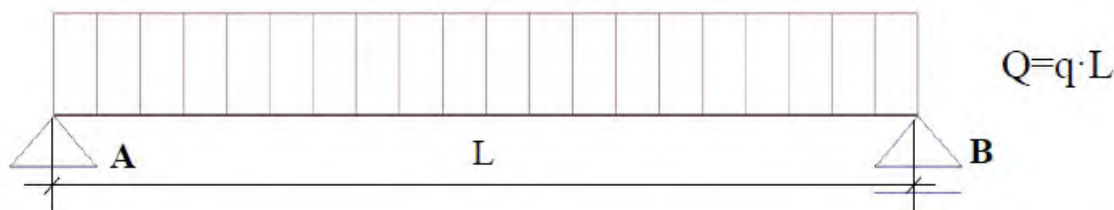


FIGURA 5. Biga articulada - recolzada amb càrrega uniforme

Tot i que els alumnes encara no han estudiat les equacions de l'estàtica (especialment el concepte de *moment d'una força*), sí que podem fer servir la lògica del que significa l'equilibri estàtic. En aquest cas veiem que, tractant-se d'un problema simètric, el valor que haurà de suportar cada reacció valdrà la meitat de la càrrega total aplicada.

$$R_A = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}, R_B = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}$$

També podem fer veure que la deformació màxima es troba al bell mig de la biga.

Dèiem que fora bo que els alumnes veiessin aplicacions d'això que estan estudiant en el seu entorn quotidià, o bé en allò estudiat en d'altres matèries. El fenomen precedent podria ser perfectament emmarcat dins l'assignatura d'història (o de cultura clàssica), tot veient el perquè de determinades construccions clàssiques i la seva solució constructiva. La deformació produïda a la llinda de certs elements es podia minimitzar amb la col·locació escaient de suports (generalment columnes) (fig. 6 i 7).

[...] a little later it occurred to a mechanic that, in order to be doubly sure of its not breaking in the middle by its own weight, it would be wise to lay a third support midway. (Galilei, 1638)

[...] una mica més tard se li va ocórrer a un mecànic que, per tal d'assegurar que no es trenqués en el punt mig pel seu propi pes, seria prudent col·locar un tercer suport a la meitat.

Així doncs, amb la col·locació d'aquest element *aparentment* l'estructura treballarà millor. Aquest fet ens pot fer introduir, encara que sigui només conceptualment, el concepte de biga hiperestàtica, és a dir, aquella en la qual hi pot haver múltiples solucions per a determinar el valor de les reaccions –d'entre les quals una d'elles serà l'òptima (fig. 8).

En principi *la lògica* semblaria indicar-nos que tots tres suports tenen el mateix valor.

$$R_A = \frac{ql}{3} = \frac{Q}{3}, R_B = \frac{ql}{3} = \frac{Q}{3}, R_C = \frac{ql}{3} = \frac{Q}{3}$$

És cert això? Evidentment, no! Tenint present que el suport central ha de suportar el doble de càrrega *sembla* que la solució òptima fora:

$$R_A = \frac{ql}{4} = \frac{Q}{4}, R_B = \frac{ql}{2} = \frac{Q}{2}, R_C = \frac{ql}{4} = \frac{Q}{4}$$

[...] this seemed to all an excellent idea. (Galilei, 1638)

[...] això semblà a tothom una idea excel·lent.



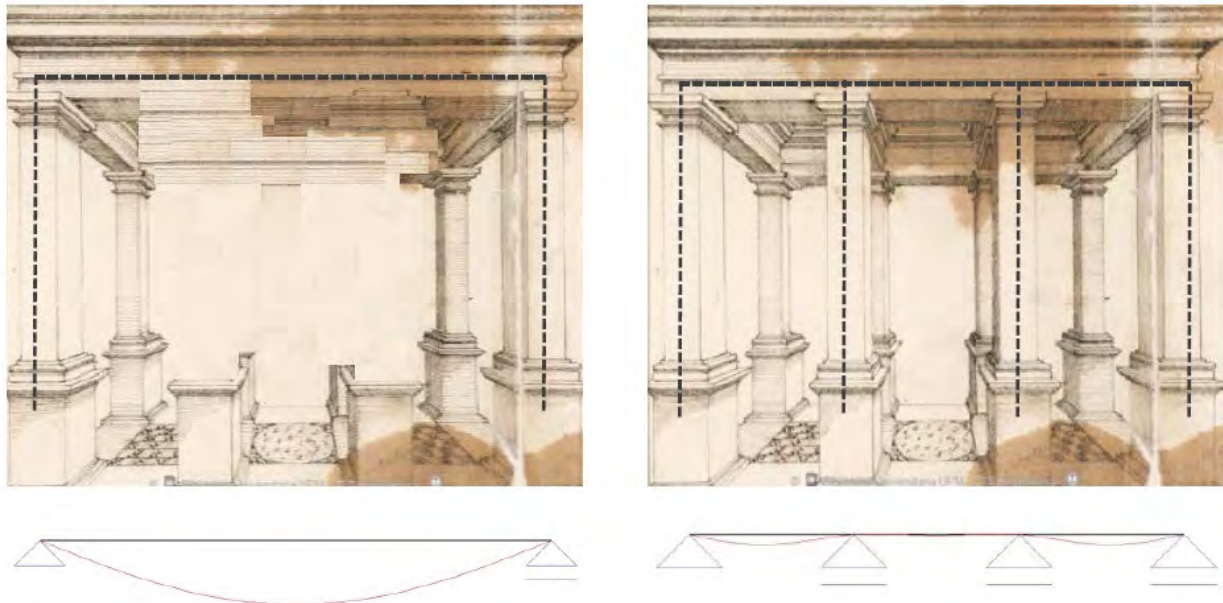


FIGURA 6. Efecte dels recolzaments sobre les deformacions



FIGURA 7. Llinda de pedra. Localització Stonehenge (Font: Internet)

L'exemple anterior pot obrir un interessant debat a l'aula: té raó Galileu plantejant que són millor tres punts de suport que no pas dos?; es poden determinar aquest valor? Podem començar a veure que a vegades la lògica ens pot jugar alguna mala passada...

Salviati continua:

[...] but the sequel showed that it was quite the opposite, for not many months passed before the column was found cracked and broken exactly above the new middle support. (Galilei, 1638)

[...] però els esdeveniments van mostrar just el contrari, ja que no passaren molt mesos abans que la columna s'esquerdés i es trenqués just per sobre del nou suport.



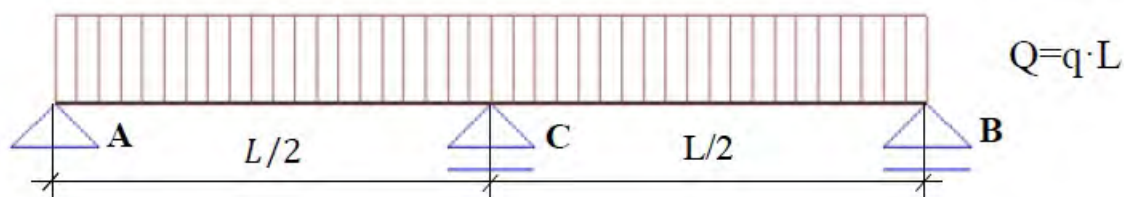


FIGURA 8. Biga amb tres punts de recolzament i càrrega uniforme. Estructura hiperestàtica

Sens dubte l'afirmació de Galileu és desconcertant: es trenca precisament pel punt de recolzament alhora que per la part superior; per què? Podríem obrir de nou un debat sobre el motiu d'aquesta afirmació. Vegem quina argumentació ens és proposada per l'autor:

[...] for when the two pieces of the column were placed on level ground it was observed that one of the end beams had, after a long while, become decayed and sunken, but that the middle one remained hard and strong, thus causing one half of the column to project in the air without any support. Under these circumstances the body therefore behaved differently from what it would have done if supported only upon the first beams; because no matter how much they might have sunken the column would have gone with them. (Galilei, 1638)

[...] doncs quant les dues peces de la columna es col·locaren sobre un terreny anivellat, es va observar que una de les bigues extremes (de recolzament) s'havia deteriorat i enfonsat després de molt temps, però la del mig seguia dura i forta, fent que la meitat de la columna es projectés a l'aire sense cap recolzament (en voladís). Sota aquestes circumstàncies el cos, per tant, es comportava diferent de com ho hauria fet si s'hagués recolzat sols en les primeres bigues; perquè no importava quant s'hagués enfonsat la columna ja que ho hauria fet solidàriament amb els recolzaments.

Aquest fet desafortunat ens condueix a la introducció d'una altra tipologia estructural, les bigues en voladís. Si bé és cert que tots en tenen una idea, ja que és molt habitual en el seu entorn quotidià, potser mai no s'han plantejat les seves característiques i funcionament així com els avantatges i inconvenients (fig. 9 i 10).

Si abans fèiem esment a la intuïció de la simetria per a resoldre problemes (tot i que podem constatar que a vegades ens pot fallar), ara la mateixa intuïció ens pot conduir a veure que tota la càrrega és suportada pel suport central. Aquest fet proporciona un notable augment del seu valor i, per tant, es converteix en un clar candidat a la ruptura... *com així fou*.

$$R_C = ql = Q_{Total}, R_B = 0$$

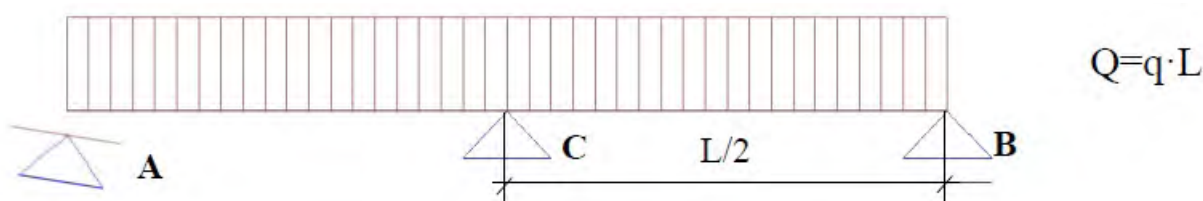


Figura 9. Situació de pèrdua de contacte de la biga amb el suport A

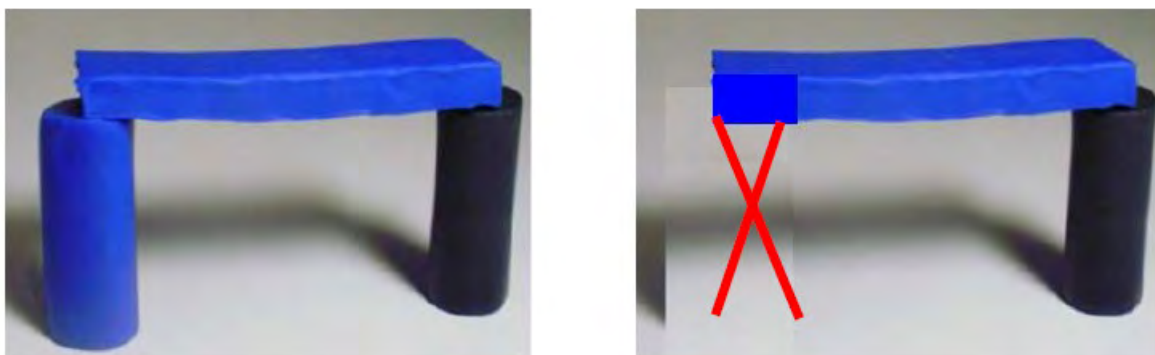


Figura 10. Estructura formant pòrtic (esquerra), en voladís (dreta)

Hem constatat, doncs, que realment el punt central pot esdevenir el punt crític si aquest actua en situació de biga volada (fig. 11). Ara bé, llegint novament el text amb cura, podem entreveure una altra dada interessant que planteja Galileu, una dada que fins ara ens ha passat desapercibuda.

[...] was found cracked and broken exactly above the new middle support. (Galilei, 1638)  
 [...] s'esquerdés i es trenqués just per sobre del nou suport.

El fet que es trenqui per la zona central ja s'ha tractat; ara bé: per què per dalt i no per baix? Aquest problema ens pot ajudar a introduir a l'aula el concepte de *tensió* i, alhora, a distingir entre tensions corresponents a esforços de tracció i a esforços de compressió.

Tant intuïtivament com experimental percebem que la zona superior es troba traccionada i la inferior, comprimida (sempre referint-nos al punt de ruptura). Dient que la zona superior es trenca, afirmem que els materials com el marbre *aguanten* millor les compressions que les traccions. Partint d'aquest fet, l'alumnat pot cercar informació d'altres materials i veure en quins això succeeix i en quin d'altres aquests valors són molt semblants tot i presentant un comportament anomenat *simètric*. Es pot donar la taula següent (taula 3), amb alguns valors ja definits, i deixar a l'alumnat que cerqui els que falten.

Material /Valors	$\sigma$ compressió (N/mm <sup>2</sup> )	$\sigma$ tracció (N/mm <sup>2</sup> )
Guix	2-12	0,1-1,5
Calcària	7-40	0,5-5
Esquists	15-70	1-10
Granit	60-180	6-15
Quarsita	80-300	7-20
Acer		
Formigó		
Formigó armat		
Coure		

TAULA 3. Valors resistius de distints materials

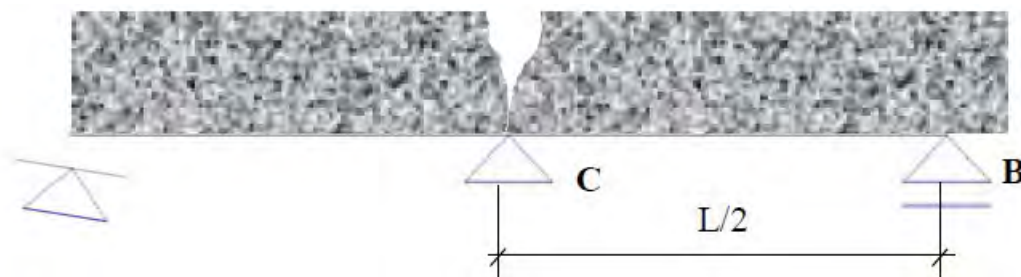


FIGURA 11. Esquema de la ruptura del material



FIGURA 12. Estructura de formigó armat

Com a corol·lari podríem parar-nos un moment en un dels materials per excel·lència, el formigó (fig. 12). Es pot presentar al grup classe aquest material tan emprat en construcció; la seva història, així com edificacions que directament o indirecta l'han fet servir al llarg del temps, acabant amb l'estudi de la seva variant més emprada: el formigó armat. Amb aquest exemple podem entendre el perquè d'aquesta configuració que, de ben segur, ells estan acostumats a veure pel carrer però en la qual, probablement, mai no deuen haver prestat atenció. Cal incidir en l'existència d'acer, precisament en aquelles zones més febles; les zones traccionades.

Galileu, per tant, de nou tenia raó... la secció es trencarà per la zona superior perquè és la zona traccionada i, presentant aquesta un valor resistiu menor que la zona compressiva, serà on es localitzarà l'inici de la ruptura.

### Les TIC poden ajudar a l'ensenyament de la història de la ciència? Conclusions

Al principi de la comunicació que ens ocupa, plantejàvem el fet de mostrar com l'ús de les TIC pot ajudar a incorporar la disciplina de la història de la ciència dins uns coneixements curriculars d'un alumnat acostumat cada vegada més a tenir aquestes eines en el seu entorn quotidià. De fet, com veiem, també la història de la ciència pot ajudar a introduir conceptes que, tractats amb les TIC, seran més fàcilment comprensibles.

Partint d'un breu fragment d'un text de Galileu (que podria ser en anglès per ajudar a la transversalitat) s'ha presentat –a través d'exemples actuals i amb l'ús de les TIC– com l'alumnat pot inserir-se perfectament en la filosofia del text, alhora que una comprensió de l'escrit, reforçada per una implicació de les TIC, l'ajudarà sens dubte a l'assimilació de conceptes vistos en d'altres matèries.

## Referències bibliogràfiques

BLOC DE LA USEE DE L'INSTITUT SEVERO OCHOA, *Tecnologia*, «Forces i estructures», [en línia] <<http://blocs.xtec.cat/tecnologiadeuseevero/2014/10/01/forces-i-estructures-unitat-3/>> [Darrer accés: 02/02/2018].

DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT, *Decret 187/2015*, DOGC núm. 6945 - 28.8.2015, [en línia] <<http://portaldogc.gencat.cat/utillsEADOP/PDF/6945/1441278.pdf>> [Darrer accés: 02/02/2018].

FERNÁNDEZ RUIZ, R., *Els esforços i les estructures*, [en línia] <[http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/MA\\_practica\\_forces\\_i\\_esfor%C3%BEos.pdf](http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/MA_practica_forces_i_esfor%C3%BEos.pdf)> [Darrer accés: 02/02/2018].

GALILEI, G. (1638), *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid, Editora Nacional, 1976.

GALILEI, G. (1638), *Dialogues Concerning Two New Sciences*, Henry Crew and Alfonso de Salvio (translators), Pantianos Classics, 1914.

UNESCO, *Las TIC en la educación*, [en línia] <<https://es.unesco.org/themes/tic-educacion>> [Darrer accés: 02/02/2018].

UPC, Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, *Resistència de materials*, [en línia] <<https://www.upc.edu/prismatic/prismatic.html>> [Darrer accés: 02/02/2018].



## **LA HISTORIA DE LA QUÍMICA EN EL MARCO LOE DE ESO Y BACHILLERATO. UNA MIRADA CONJUNTA DESDE LA DIDÁCTICA Y LA HISTORIA DE LAS CIENCIAS**

**LUIS MORENO MARTÍNEZ;<sup>1</sup> M. ARACELI CALVO PASCUAL<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> INSTITUTO DE HISTORIA DE LA MEDICINA Y DE LA CIENCIA LÓPEZ PIÑERO, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA.

<sup>2</sup> FACULTAD DE FORMACIÓN DE PROFESORADO Y EDUCACIÓN, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID.

Palabras clave: *historia de la química, libros de texto, didáctica de las ciencias, estudios históricos sobre ciencia*

### **The History of Chemistry in Spanish Secondary Education (2007-2016). An Overview from Science Education Research and the History of Science**

Summary: *This paper explores some differences between the history of chemistry in Spanish chemistry textbooks and the new approaches and research results provided by historians of science.*

Key words: *History of Chemistry, textbooks, science education, history of science*

### **Introducción**

Actualmente existe en didáctica de las ciencias un amplio consenso a la hora de considerar la historia de la ciencia como una valiosa herramienta pedagógica para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Dicho consenso hunde sus raíces en diversos estudios y debates en torno a la pertinencia de la aproximación histórica para la educación científica. El siglo xx fue especialmente prolífico en este terreno, existiendo varios autores que –tanto desde la pedagogía, como desde las ciencias– abogaron por la incorporación de la historia de la ciencia a la práctica educativa; por constituir un recurso de interés para la selección y secuenciación de los sabe-



res científicos, para el diseño metodológico en la enseñanza de las ciencias o para la comprensión de cómo los estudiantes aprenden ciencias, entre otros argumentos. Una muestra de estas aproximaciones en el primer tercio del siglo xx y para el ámbito de la química lo encontramos en los trabajos del químico-pedagogo Wilhelm Ostwald (Niaz, 2016) o del profesor Modesto Bargalló (Moreno Martínez & Bertomeu Sánchez, 2017).

En la segunda mitad del siglo xx y en el contexto internacional, cobraron especial relevancia los trabajos del químico James Bryant Conant. Sus célebres *Harvard Case Histories in Experimental Science* (Conant, 1951), si bien con públicos cambiantes y perspectivas cuestionadas y matizadas en años posteriores, contribuyeron a fortalecer las relaciones entre historia de las ciencias y educación. Los posteriores trabajos de Michael R. Matthews (Matthews, 1988; 1994) también ayudaron a dicho fortalecimiento. En esta línea, numerosos trabajos publicados en los últimos años han contribuido a reforzar las relaciones entre historia y didáctica de las ciencias, señalando tanto potencialidades como limitaciones de la historia de la ciencia en contextos y materiales educativos. Una muestra del interés académico de este tipo de investigaciones lo constituye la publicación en 2014 del primer *Handbook Internacional* sobre investigación en historia, filosofía y enseñanza de la ciencia (Matthews, 2014). Entre las distintas líneas de investigación, cabe destacar el análisis comparado de las narrativas históricas frecuentes en materiales educativos y divulgativos y las generadas por los estudios históricos y sociales sobre ciencia.

De este modo, los historiadores de la ciencia han subrayado la necesidad de repensar críticamente la historia de la ciencia en los libros de texto, al incluir estos materiales narrativas netamente distanciadas de los enfoques y resultados procedentes de la investigación histórica (Bertomeu Sánchez, 2011; Nieto Galán, 2010). Así, cuestiones sobre historia de la ciencia ampliamente abordadas por historiadores de la ciencia e incluso ya abandonadas y superadas, no habrían permeado en el ámbito educativo. Asimismo, desde la didáctica de las ciencias se ha destacado que la historia de la ciencia adecuada para el aula de ciencias sería aquella que nace del trabajo de los historiadores de la ciencia, que responde a las necesidades del profesorado y que lo hace en un marco avalado por la didáctica de las ciencias (Quintanilla Gatica *et al.*, 2014). En definitiva, llevar la historia de la ciencia a las aulas exigiría el trabajo conjunto entre docentes e investigadores en historia y didáctica de las ciencias.

## Objetivos

Desde esta óptica, se pretende ofrecer y discutir algunos resultados de investigación que han puesto de manifiesto la persistencia actual de una significativa desconexión entre la historia de la química presente en los libros de texto de física y química de ESO y bachillerato y la historia de la ciencia académica. De entre las distintas cuestiones analizadas, dada su pertinencia curricular, se abordan aquí dos de ellas: la síntesis de la urea de Wöhler en 1828 y su papel en la crisis del vitalismo, presente como aprendizaje sobre historia de la química en 4º de ESO, y el papel de Lavoisier como padre fundador de la química, de especial interés en 1º de bachillerato. La muestra de libros de texto analizada, recogida al final de este artículo, constó de un total de veinte libros de texto de cinco editoriales de alto prestigio editorial según el ranking *Scholarly Publishers Indicators SPI* 2014,<sup>1</sup> tanto general

---

1. *Scholarly Publishers Indicators in Humanities and Social Sciences*, [en línea] <<http://ilia.cchs.csic.es/SPI/rankings.html>> [Último acceso: 27/01/2018]

como del ámbito educativo. Se trata de editoriales destacadas y ampliamente utilizadas en las distintas comunidades autónomas en el marco LOE para ESO y bachillerato (2007-2016).

## Resultados

La revisión del currículo LOE de ESO y bachillerato revela que si bien los aprendizajes sobre historia de la química en las materias de física y química se reducen a un pequeño número de temáticas (Moreno Martínez, 2015), la historia de la química también se puede localizar en otras materias científico-tecnológicas e incluso del área de las humanidades y de las ciencias sociales (Moreno Martínez & Calvo Pascual, 2017). Asimismo, la revisión del currículo revela la historia de la ciencia como una herramienta para mostrar la ciencia (en nuestro caso, la química) como una actividad humana colectiva, dinámica, inscrita en un determinado contexto del que se nutre y al que nutre, afectada por factores sociales, políticos y económicos y generadora de un conocimiento tentativo, hipotético y en construcción. Una imagen de la química que concuerda con la proporcionada por los resultados de investigación procedentes de la historia de la ciencia.

Por el contrario, el análisis de los libros de texto ha puesto de manifiesto la persistencia en estos materiales educativos de narrativas históricas sobre química netamente diferenciadas de los estudios históricos sobre ciencia. En esta línea, se ha encontrado que tres de los cinco libros de texto de física y química de 4º de ESO analizados presentan la síntesis de la urea de Wöhler en 1828 como el golpe definitivo a la teoría del vitalismo, naciendo la química orgánica como subdisciplina de la química. Por el contrario, desde la historia de la ciencia se ha cuestionado dicho mito fundacional. Entre los diversos motivos apuntados (Ramberg, 2000), se ha señalado que la discusión generada en torno al experimento se centró en la inesperada obtención de una sustancia que no poseía las propiedades de una sal, pero no en el supuesto golpe que dicha síntesis suponía para la teoría del vitalismo. Asimismo, dicha teoría no sería uniforme, sino que abarcaría un conjunto más amplio de ideas que incluía desde concepciones metafísicas que asumían la fuerza vital como un ente inmaterial a la concepción de la fuerza vital como una fuerza análoga a la gravitación de Newton. De este modo, a la muerte de Wöhler en 1882, los químicos orgánicos alemanes habrían encontrado en la síntesis de la urea un oportuno mito fundacional nacional para la química orgánica. Mito respaldado por fisiólogos que habrían tenido interés en distanciarse del vitalismo, para acercarse a las ciencias fisicoquímicas, tal y como ha señalado recientemente Peter J. Ramberg (2015).

Desde el punto de vista didáctico, encontramos en la desmitificación de la síntesis de la urea de Wöhler como golpe definitivo al vitalismo una oportunidad para mostrar la historia de la química como una reconstrucción del pasado más compleja, menos idealizada y en absoluto basada en experimentos cruciales que de forma categórica derriban todo el conocimiento anterior. La historia de la química se revela de este modo no como un relato estático, sino como una reconstrucción sujeta a nuevas miradas, de interés para desarrollar el pensamiento crítico en el aula.

En lo que respecta a la segunda cuestión planteada, se ha encontrado que cuatro de los cinco libros de texto de física y química de 1º de Bachillerato analizados sitúan a Lavoisier como padre fundador de la química. Si bien las clásicas narrativas han fundamentado esta paternidad en su papel llevando la balanza a la práctica química y derribando la teoría del flogisto, esta imagen ha sido notablemente cuestionada por la investigación histórica (Bertomeu Sánchez & García Belmar, 2006). Entre otros argumentos, los historiadores de la ciencia han mostrado que la balanza ya estaba presente de forma incluso imprescindible en muchos laboratorios de química con antelación a Lavoisier y

que su victoria frente a la teoría del flogisto no fue tal, habiendo sido incluso exagerada por los químicos-historiadores posteriores. De nuevo, encontramos otro mito fundacional que persiste en los libros de texto escolares. Algo especialmente problemático en 1º de Bachillerato, por ser el curso que otorga un mayor protagonismo curricular al desarrollo de las leyes de las combinaciones químicas, lo que implica la presencia prácticamente asegurada de Lavoisier en ellos.

Para el conjunto de libros de texto de ESO y bachillerato analizados, en tres de los veinte la paternidad de la química es compartida entre Lavoisier y otras personalidades de la historia de la química, como Dalton, Berzelius o Boyle. Solo uno de los libros de texto indica que la química surgió en el siglo XVIII por el trabajo colectivo de «una serie de hombres de ciencias» que «aplicaron el método científico a las investigaciones químicas». Si bien esto muestra un carácter colectivo de la actividad científica, también revela la ausencia de mujeres en la historia de la química, invisibles en la mayoría de libros de texto analizados; así como una visión idealizada de la química como mera aplicación del método científico al estudio de las sustancias químicas, obviando la complejidad y la dimensión material de las prácticas experimentales, las controversias o el papel de los instrumentos científicos.

### **Comentario final**

A tenor del análisis realizado es posible colegir la persistencia de una desconexión significativa entre estudios históricos de la ciencia y las narrativas históricas en los libros de texto, explicitada anteriormente para dos cuestiones sobre historia de la química. Ello pone de manifiesto las limitaciones y riesgos de una enseñanza basada únicamente en el libro de texto, en los que la historia de la química es superficial y anecdótica y, cuando está presente, se sitúa lejos de los resultados proporcionados por los historiadores de la ciencia. Así, constituye un desafío pendiente para la didáctica de las ciencias colaborar con aquellos, no solo en aras de una mejor historia de la química escolar, sino porque la imagen de la química que el propio currículo establece, se sitúa mucho más cerca de la proporcionada por los estudios históricos sobre ciencia que de la de las clásicas narrativas basadas en mitos fundacionales.

## Libros de texto analizados

- BALLESTERO JADRAQUE, M.; BARRIO GÓMEZ DE AGÜERO, J. (2008), *Física y Química 1 Bachillerato Proyecto Tesela*, Navarra, Oxford.
- BARRADAS SOLAS, F.; LÓPEZ DE GUEREÑU, J. G.; VALERA ARROYO, P.; VIDAL FERNÁNDEZ, M. C. (2008), *Física y Química 1 Bachillerato Proyecto La Casa del Saber*, Madrid, Santillana.
- CARDONA, Á. R.; GARCÍA PÉREZ, J. A.; PEÑA SAINZ, Á.; POZAS MAGARIÑOS, A.; VASCO, A. J. (2008), *Física y Química 4 ESO*, Madrid, McGraw-Hill.
- FONTANET RODRÍGUEZ, À. (2014), *Química Bachillerato*, Barcelona, Vicens Vives.
- FONTANET RODRÍGUEZ, À.; MARTÍNEZ DE MURGUÍA LARRECHI, M. J. (2012a), *Física y Química 3 Educación Secundaria Proyecto Nuevo Ergio*, Barcelona, Vicens Vives.
- FONTANET RODRÍGUEZ, À.; MARTÍNEZ DE MURGUÍA LARRECHI, M. J. (2012b), *Física y Química 4 Educación Secundaria Proyecto Nuevo Ergio*, Barcelona, Vicens Vives.
- GUARDIA VILLARROEL, C.; MENÉNDEZ HURTADO, A. I.; PRADA P. DE AZPEITIA, F. DE. (2011), *Química 2 Bachillerato Proyecto La Casa del Saber*, Madrid, Santillana.
- MARTÍNEZ DE MURGUÍA LARRECHI, M. J.; FONTANET RODRÍGUEZ, À. (2012), *Física y Química 1 Bachillerato*, Barcelona, Vicens Vives.
- PEÑA SAINZ, Á.; POZAS MAGARIÑOS, A.; GARCÍA PÉREZ, J. A.; RODRÍGUEZ CARDONA, A.; VASCO, A. J. (2007), *Física y Química 3 ESO*, Barcelona, McGraw-Hill.
- PEÑA TRESANCOS, J.; VIDAL FERNÁNDEZ, M. C. (2009), *Química 2 Bachillerato Proyecto Tesela*, Vizcaya, Oxford.
- PIÑAR GALLARDO, I. (2011), *Física y Química 3º ESO Proyecto Adarve* (Vol. 1-4), Madrid, Oxford.
- PIÑAR GALLARDO, I. (2012), *Física y Química 4º ESO. Adarve* (Vol. 1-4), Madrid, Oxford.
- POZAS MAGARIÑOS, A.; MARTÍN SÁNCHEZ, R.; RODRÍGUEZ CARDONA, A.; RUÍZ SÁENZ DE MIERA, A. (2009), *Química 2 Bachillerato*, Madrid, McGraw-Hill.
- RODRÍGUEZ CARDONA, A.; POZAS MAGARIÑOS, A.; GARCÍA PÉREZ, J. A.; MARTÍN SÁNCHEZ, R.; PEÑA SAINZ, Á. (2012), *Física y Química 1 Bachillerato*, Madrid, McGraw-Hill.
- VIDAL FERNÁNDEZ, M. C.; PRADA P. DE AZPEITIA, F. DE; LUIS GARCÍA, J. L. DE; PICHARDO GÓMEZ, R.; SANZ MARTÍNEZ, P. (2011), *Física y Química 4 ESO Proyecto Los Caminos del Saber*, Madrid, Santillana.
- VIDAL FERNÁNDEZ, M. C.; PRADA P. DE AZPEITIA, F. DE; LUIS GARCÍA, J. L. DE; SANZ MARTÍNEZ, P. (2011), *Física y Química 3 ESO Proyecto Los Caminos del Saber*, Madrid, Santillana.
- ZUBIAURRE CORTÉS, S.; ARSUAGA FERRERAS, J. M.; GARZÓN SÁNCHEZ, B. (2012), *Química 2 Bachillerato*, Madrid, Anaya.
- ZUBIAURRE CORTÉS, S.; ARSUAGA FERRERAS, J. M.; MORENO, J.; GARZÓN SÁNCHEZ, B. (2014), *Física y Química 1 Bachillerato*, Madrid, Anaya.
- ZUBIAURRE CORTÉS, S.; MORALES, A. M.; ARSUAGA FERRERAS, J. M.; PÉREZ, A. (2011), *Física y Química 3 Educación Secundaria* (Vol. 1-3), Madrid, Anaya.
- ZUBIAURRE CORTÉS, S.; MORALES, A. M.; GÁLVEZ, F.; MOLINA, I. (2012), *Física y Química 4 Educación Secundaria* (Vol. 1-3), Madrid, Anaya.

## Referencias bibliográficas

- BERTOMEU SÁNCHEZ, J. R. (2011), «Pedagogía química y circulación de la ciencia: el sistema periódico de los elementos durante el siglo XIX». En: ÁVILA RODRÍGUEZ, L. E. (ed.). *Química: Historia, Filosofía y Educación*, Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 25-42.
- BERTOMEU SÁNCHEZ, J. R.; GARCÍA BELMAR, A. (2006), *La revolución química. Entre la historia y la memoria*, Valencia, Publicaciones de la Universitat de València.
- CONANT, J. B. (1951), *On Understanding Science. An Historical Approach*, Nueva York, Mentor Books.
- MATTHEWS, M. R. (1988), «A role for history and philosophy in science teaching», *Educational Philosophy and Theory*, 20, (2), 67-81.
- MATTHEWS, M. R. (1994), *Science Teaching: The Role of History and Philosophy of Science*, Nueva York, Routledge.
- MATTHEWS, M. R. (ed.) (2014), *International Handbook of research in History, Philosophy and Science Teaching* (Vol. 1/3), Dordrecht, Springer.
- MORENO MARTÍNEZ, L. (2015), «La historia de la química en ESO y Bachillerato. Del currículo al libro de texto». En: GRAPÍ VILUMARA, P.; MASSA ESTEVE, M. R. (ed.), *Actes de la XIII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona, SCHCT-IEC, 55-58.
- MORENO MARTÍNEZ, L.; BERTOMEU SÁNCHEZ, J. R. (2017), «Comunicando didáctica e historia de las ciencias: Modesto Bargalló y los usos pedagógicos de la historia de la ciencia (1915-1936)», *Enseñanza de las ciencias*, Número Extraordinario, 3785-3789.
- MORENO MARTÍNEZ, L.; CALVO PACUAL, M. A. (2017), «La historia de la química en el currículo de ESO y de Bachillerato. Una revisión interdisciplinar para la investigación didáctica», *Enseñanza de las ciencias*, 35, (2), 147-160.
- NIAZ, M. (2016), *Chemistry Education and Contributions from History and Philosophy of Science*, Londres & Nueva York, Springer.
- NIETO GALÁN, A. (2010), «¿Para qué sirve la historia de la química? Una reflexión sobre el pasado de una profesión». En: CHAMIZO, J. A. (ed.). *Historia y Filosofía de la Química. Apuntes para la enseñanza*, México, Siglo XXI, 15-38.
- QUINTANILLA GÁTICA, M.; DAZA ROSALES, S.; CABRERA CASTILLO, H. (ed.) (2014), *Historia y filosofía de la ciencia. Aportes para una «nueva aula de ciencias», promotora de ciudadanía y valores*, Santiago de Chile, Bellaterra.
- RAMBERG, P. J. (2000), «The Death of Vitalism and the Birth of Organic Chemistry: Whöler's urea Synthesis in Textbooks of Organic Chemistry», *Ambix*, 47, 170-195.
- RAMBERG, P. J. (2015), «That Friedrich Wöhler's synthesis of urea in 1828 destroyed vitalism and gave rise to organic chemistry». En: NUMBERS, R. L.; KAMPOURAKIS, K. (ed.). *Newton's Apple and Other Myths about Science*, Cambridge, Harvard University Press, 59-66.

## EXPERIMENTS CRUCIALS AL LABORATORI

### ENRIC PÉREZ CANALS

DEPARTAMENT DE FÍSICA DE LA MATÈRIA CONDENSADA. UNIVERSITAT DE BARCELONA.

Paraules clau: *quasi-història, història de la física quàntica, Einstein, efecte fotoelèctric, fotó*

### Crucial Experiments in the Lab

Summary: *Some reflections gathered along more than two years of experience giving the course «Historical experiments in quantum physics» –last semester of Physics degree– are developed: 1) The recreation of some debates in the history of science can be extremely useful in order to foster scientific reasoning among students, 2) Historiographical methods can be adapted to the teaching of current physics to avoid dogmatism in the classroom, 3) Some notes on how this ideas can be applied to a lesson on the concept of 'photon' are given.*

Key words: *quasi-history, history of quantum physics, Einstein, photoelectric effect, photon*

### Introducció

Ara ja fa més de dos cursos que, a la Facultat de Física, en Joan Manel Hernández i jo mateix impartim semestralment vuit sessions sota el títol «Experiments històrics de la física quàntica». Formen part del Laboratori de física moderna, assignatura obligatòria de l'últim semestre de la menció de Física fonamental. Malgrat estar incloses en una assignatura eminentment experimental, en aquestes sessions combinem classes al laboratori i a l'aula i, a més, introduïm elements d'història de la física. En aquesta comunicació exposaré algunes reflexions que són fruit d'aquesta experiència, centrant-me en les possibilitats que presenta la història de la ciència en la transmissió de continguts científics.

### Experiments històrics de la física quàntica

Cada sessió està dedicada a un experiment que té un paper destacat en les reconstruccions històriques del procés previ i immediatament posterior al sorgiment de



la mecànica quàntica. Es proposa als estudiants fer-los per parelles, i comentar-ne els resultats a la classe amb tot el grup. Són:

1. Mesura de la relació càrrega-massa dels raigs catòdics
2. Mesura de la càrrega de l'electró
3. Radiació de cos negre
4. Efecte fotoelèctric
5. Dispersió de partícules alfa
6. Espectres atòmics
7. Mesura de la dispersió d'electrons per mercuri gasós
8. Difracció d'electrons

La primera cosa en què parem atenció és en la diferència notable que hi ha entre els muntatges experimentals dels laboratoris docents i els originals. També mirem de contextualitzar històricament la mesura i el fenomen observat tot situant els debats en el marc on van adquirir, si és el cas, la rellevància que avui els atribuïm. Un dels propòsits del curs és discutir fins a quin punt es poden considerar experiments crucials per a dirimir qüestions teòriques fonamentals, sense renunciar al debat més general de si hi ha algun experiment que sigui crucial *per se* (Lakatos, 1974). Val a dir que la intenció prioritària del curs no és transmetre un coneixement acurat dels episodis històrics pertinents, sinó utilitzar-los per a qüestionar i aprofundir alhora en els conceptes teòrics involucrats, però sense caure en deformacions.

### **Història de la ciència a l'aula: una proposta**

Malgrat que aquest no és el lloc per fer un repàs exhaustiu dels avantatges i inconvenients d'introduir la història de la ciència en els currículums de ciències, no és sobrer comentar de passada els més destacats.<sup>1</sup> Des d'un punt de vista científic, el coneixement de la història acostuma a veure's com un estrany, ja que al cap i a la fi no aporta res a l'enteniment de la forma vigent de les teories. Això és bastant cert, i poc tinc a dir contra un ensenyament que prescindeixi completament –si és que es pot– dels processos històrics. Ara bé, malauradament, la història gairebé sempre fa acte de presència, però reduïda al paper d'anecdota que permet fer les classes més entretingudes i florides. Per què?

La història de la ciència, feta amb rigor i honestat, mostra una evolució del pensament científic que dista molt del desenvolupament acumulatiu i unidireccional, mite criticat repetidament, però repetidament enaltit amb la història com a coartada. Quan se subjugua la història a una certa idea preconcebuda i predominant de ciència, no l'hauriem d'anomenar història, sinó, amb Whitaker, *quasi-història*, ja que aleshores es converteix en una reconstrucció racional descontextualitzada que encareix les teories contemporànies (Whitaker, 1979). En contrast, la història pot ajudar a evidenciar suposicions i plantejaments que moltes vegades resten amagats darrere presentacions acrítiques que se sustenten en interpretacions titllades d'evidència empírica. Una història que tracta amb cura el rerefons on van emergir debats i teories del passat convida a pensar en la dinàmica del coneixement científic, en el mètode científic i, en definitiva, en què és la ciència. Entre d'altres virtuts, aques-

---

1. Per al cas de la física podeu veure, per exemple, Brush (1969) i Holton (1989).

ta possibilitat defuig la miopia de l'especialització, però no amb faules o xafarderies, sinó elevant el grau d'abstracció de les lliçons.

Però aquí m'interessa destacar especialment una de les possibilitats que brinda la història: reviu-re, replantejar antigues controvèrsies, qüestions que avui es consideren superades o solucionades, i incitar els alumnes a analitzar-les, però atenint-se, en la mesura que es pugui, a les circumstàncies en què es van produir. Certament és un exercici difícil, però en aquest cas el mèrit no està tant en l'assoliment, difícil de quantificar, sinó en el mateix intent. L'intent involucra un canvi d'actitud interessant, atès l'estat de la docència.

Crec que, en termes generals, hi ha una diferència, que frega la contraposició, entre l'ensenyament de ciències i allò en què consisteix, en principi, la pràctica científica. L'esperit científic, cosí germà de l'esperit crític, hauria de viure en la pregunta contínua, beure de l'escepticisme, advertir de la provisionalitat. Tota hipòtesi, tota dada, cal prendre-la amb circumspecció i només en la mesura que ha estat prèviament argumentada i garantida. Una mesura que mai no és sense condicions.

Tot el contrari d'allò que passa, normalment, a l'aula. El procés d'adquisició de coneixement acostuma a ser acrític i consistent en una assumpció gradual de les teories i els mètodes per a aplicar-les que no deixa de ser, a la fi, un procés memorístic. I el fet de fer exercicis o experiments no mitiga aquesta carència: al laboratori, els estudiants estan cridats a adoptar una actitud que podríem qualificar sense embuts d'anticientífica; van proveïts d'un guió que indica, pràcticament sense marge de maniobra, els passos a seguir. Si no obtenen els resultats pautats, cal que justifiquin on s'han equivocat o on han fallat els aparells.

Penso que la història pot servir d'antídot per a aquesta xacra. Com? Plantejant controvèrsies i debats dels quals els estudiants majoritàriament en coneixen el desenllaç, però –i això és simptomàtic– no el fil argumental. En la meua experiència aquest plantejament s'ha mostrat com una bona forma de fer-los prendre consciència de fins a quin punt el coneixement que han adquirit és pragmàtic. Es mou la Terra? Hi ha àtoms? Qüestions amb respostes tingudes per evidents, però d'argumentació no tan senzilla. En el primer cas podem acudir als debats entre copernicans i aristotèlics; en el segon, als primers passos de la teoria cinètica.

Així com en l'estudi de la història hi ha certa tendència a ressaltar els punts foscos, les mancances de les teories descartades i arrossegades pel torrent de la història i el desenvolupament tècnic, en les classes de ciències, per contra, es tendeix a presentar les teories vigents com a acabades, rodones i sense fissures. No s'acostumen a explicar les paradoxes o contradiccions que encara les sobreviuen, sovint arraconades i oblidades, però mai completament. Entre historiadors de la ciència és habitual intentar evitar el *whigisme*: cal posar esment en no mirar les teories avui no acceptades amb el filtre dels nostres coneixements actuals. Hem d'apropar-nos a les contribucions passades amb ulls nets, neutres. O almenys procurar-ho. Cal, doncs, fer ciència *de debò* quan mirem enrere: valorar els resultats, amb els experiments que els avalen o refuten, els fonaments conceptuals del moment, els interessos de l'època, etc. Els historiadors prenem aquesta precaució. Però, i els científics? Per què no hauríem d'aplicar aquest mètode –que podríem anomenar historiogràfic– a l'ensenyament de la ciència, de les teories actuals? No ens les hauríem de prendre com un destí tancat i barrat, sinó com el que són, un producte d'una època, amb els experiments que les acrediten i –també n'hi ha!– els que les qüestionen o que no hi encaixen. Per què no podem aplicar els miraments que tenim per examinar el passat a l'hora d'examinar el present? És així com penso que la història, o el mètode historiogràfic, pot venir a combatre el dogmatisme imperant en el món acadèmic.

### Un exemple: els fotons

Dedicaré el que queda de nota a donar uns apunts per a una possible estratègia de com emprendre un tema de física amb la història com a eina d'anàlisi en el sentit que acabo de proposar, basant-me en una de les sessions de l'assignatura que dona títol i sentit a aquesta ponència. No pretenc que aquest esquema d'exposició serveixi de patró per a qualsevol tema, ja que la casuística de cada episodi demana enfocaments i tractaments diferents.

La quarta sessió està dedicada a l'efecte fotoelèctric, i el protagonista de la història és el fotó. Comencem per l'experiment. Al laboratori es demana als estudiants verificar fins a quin punt se satisfà la llei d'Einstein de l'efecte fotoelèctric (Eisberg & Resnick, 1993: 47-55):

$$E = h\nu - w.$$

Quan s'il·lumina un metall (una cel·la fotoelèctrica) la teoria diu que es poden arrencar electrons si la freqüència de la llum incident està per sobre de cert llindar. En termes d'electrons,  $E$  seria l'energia cinètica dels corpuscles arrencats,  $\nu$  la freqüència de la llum incident, i  $w$  la funció treball del material, que és el preu energètic d'extreure'ls del sòlid. La novetat de la proposta d'Einstein de 1905 va ser que l'energia de la llum només es pogués transmetre als electrons en quàntums de magnitud  $h\nu$ , i no de manera contínua (Einstein, 1905). Segons això, és el fet que un electró només pugui absorbir un únic quàntum el que provoca que una llum de freqüència inferior al llindar, per més intensa que sigui, no provoqui l'efecte.

La quasi-història presenta el fotó d'Einstein com la solució revolucionària a un trencaclosques que posteriorment el físic americà Robert Millikan va verificar de manera espectacular el 1916. D'aquesta manera tot concorda amb l'ideal de mètode científic: un fenomen esperant explicació, un geni proposant una hipòtesi agosarada i un experimental meticulós que la confirma amb tots els ets i uts.

Com ens pot ajudar la història en aquest cas? No és difícil veure que, certament, el fenomen era conegut des de finals del segle XIX, i que ben aviat es va detectar la rellevància de la freqüència de la llum en detriment de la intensitat (Wheaton, 1983). Ara bé, el nombrós grup de radiacions novingudes arran del desenvolupament de l'electricitat no va convertir l'efecte fotoelèctric en quelcom particularment problemàtic, ja que eren moltes les rareses que aleshores s'anaven acumulant als laboratoris. D'això en podem veure mostres també en l'article original d'Einstein: la motivació i els raonaments del cèlebre físic no estan centrats, ni molt menys, en aquest efecte, sinó que tenen una intenció molt més teòrica, més fonamental. I això malgrat que es conegui aquesta contribució com *l'article de l'efecte fotoelèctric*. A partir de raonaments estadístics i termodinàmics, Einstein proposa entendre els processos d'emissió i absorció de la llum de freqüència elevada com si aquesta no es transmetés de manera contínua, sinó per paquets de mida  $h\nu$ . No pretén acabar amb un cop genial amb la visió ondulatoria de la llum, i així ho indica en el mateix títol de l'article: «Sobre un punt de vista heurístic relatiu als processos d'emissió i adsorció de la llum». Es tracta, doncs, d'una investigació exploratòria (heurística), que no pretén liquidar la qüestió. A més, dibuixa amb molta cura els límits de la validesa de la seva hipòtesi: una analogia formal entre gasos i radiació que adquireix sentit només en processos d'emissió i adsorció, i això únicament en un cert rang de freqüències.

La confirmació de Millikan també amaga sorpreses (Millikan, 1916). El físic americà es preocupa de deslligar la verificació experimental de la llei d'Einstein de la hipòtesi estraforària que la susten-

ta, i es mostra completament contrari a restaurar una imatge corpuscular de la llum. De fet, la rebuda de la hipòtesi dels quanta d'energia d'Einstein va ser entre freda i adversa (Navarro, 2009). I això fins i tot després de les contribucions de Millikan.

De manera que la construcció utòpica del mètode científic s'ensorra quan obrim la porta de l'aula a la història. Ni la hipòtesi d'Einstein era realista, sinó heurística, ni la confirmació experimental apuntava al fotó, sinó únicament a la llei. Aquest no és un cas aïllat en l'esdevenir històric del coneixement científic, fins al punt que l'excepció no és la violació del mètode sinó a l'inrevés. La història mostra que el mètode és una entelèquia poc propera al dia a dia dels científics, però amb molt d'èxit com a esquema narratiu.

Una qüestió interessant per plantejar a l'aula és si calia abraçar la hipòtesi heurística d'Einstein, o si era més sensat fer el que van fer la majoria dels seus col·legues: considerar-la una patinada. Es van equivocar? Els arguments d'Einstein, malgrat ser interessants i profètics en termes actuals, tenien prou pes com per a desestimar l'electromagnetisme maxwellià? Llegint l'article d'Einstein, veiem que ni ell mateix no ho pretenia. Però el que interessa aquí és que estem obligats a llegir l'article, valorar-ne els arguments i, en definitiva, pensar sobre aquest tema. No quedar-nos amb clixés o relats estereotipats.

No puc estendre'm en les múltiples ramificacions que pot prendre aquesta història apassionant: la diferència entre la hipòtesi d'Einstein i la de Planck, sovint confoses (Pérez, 2007), la identificació de la natura dual de la llum per part d'Einstein ja el 1909 (Navarro, 2009), o el significat de *fotó* per a qui li va donar nom, Gilbert N. Lewis, el 1926 (Lewis, 1926).

I, amb tot això, què és un *fotó*? N'és Einstein el pare? Va néixer el 1905? Potser deu ser per desinterès, o per una mala praxi docent, o per altres i diversos motius, però el cert és que la idea que els estudiants tenen del *fotó* es desvia força d'allò que es correspon amb la idea que es desprèn de la teoria que en ret compte, la teoria quàntica de camps. Poca cosa té a veure amb la idea original d'Einstein, i poca cosa amb la idea tradicional de partícula (Hobson, 2010). Ara bé, l'anàlisi dels requisits de la hipòtesi original de 1905 és una ajuda excepcional per a discutir tot això a la classe. Aquestes i altres qüestions que encara avui estan vives (Lamb, 1995) poden convertir una sessió sobre l'efecte fotoelèctric en un debat on es considerin els pros i els contres de les diferents interpretacions, quins fenòmens s'expliquen satisfactòriament i quins resten foscos, suavitzant així una forma d'escometre la docència que presenta els resultats de la física contemporània d'una manera més enlluernadora que brillant.

## Referències bibliogràfiques

- BRUSH, S. G. (1969), «The role of history in the teaching of physics», *The physics teacher*, 7, 271-280.
- EINSTEIN, A. (1905), «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt», *Annalen der Physik*, 14, 132-148. Traducció al català a: SALLEN, E., ROCA, A., MOLINA, A. (2005), *El jove Einstein en català*, Barcelona, IEC.
- EISBERG, R., RESNICK, R. (1993), *Física cuántica. Átomos, molècules, sòlids, núcleos y partículas*, México, Limusa.
- HOBSON, A. (2010), «There are no particles, there are only fields», *American Journal of Physics*, 81, 211-223.
- HOLTON, G. J. (1989), *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*, Barcelona, Reverté. [Edició ampliada i revisada per S. G. Brush]
- LAKATOS, I. (1974), «The role of crucial experiments in science», *Studies in History and Philosophy of Science*, 4, 319-320.
- LAMB Jr., W. E. (1995), «Anti-photon», *Applied Physics B*, 60, 77-84.
- LEWIS, G. N. (1926), «The conservation of photons», *Nature*, 118, 274.
- MILLIKAN, R. (1916), «A direct photoelectric determination of Planck's "h"», *Physical Review*, 7, 355-388.
- NAVARRO, L. (2009), *Einstein, profeta y hereje*, Barcelona, Tusquets.
- PÉREZ, E. (2007), «Einstein i la calor específica dels sòlids: arguments per a una teoria quàntica», *Revista de Física*, 4, 34-48.
- WHEATON, B. R. (1983), *The tiger and the shark. Empirical roots of wave-particle dualism*, Cambridge, Cambridge University Press.
- WHITAKER, M. A. B. (1979), «History and quasi-history in physics education. I», *Physics Education*, 14, 108-112.

## **ANTOINE-FRANÇOIS FOURCROY: ORGANITZADOR DE LA QUÍMICA I DEL SEU ENSENYAMENT A LA FRANÇA POSTREVOLUCIONÀRIA**

**PERE GRAPÍ**

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA - CEHIC.

Paraules clau: *Fourcroy, ensenyament química, afinitats químiques, revolució francesa*

### **Antoine-François Fourcroy: Organizing Chemistry and Chemistry Education in Post-Revolutionary France**

Summary: *The French chemist Antoine-François Fourcroy (1755-1809) was a relevant member of the community of opinions constituted around Lavoisier, along with Berthollet, Laplace, Monge and Guyton de Morveau among others. Fourcroy exerted control in many teaching institutions, proved to be a prolific chemistry textbook writer, as well as an active and influent protagonist in the field of educational politics. The subject of this paper is about Fourcroy's project for the teaching of chemistry in the context of the construction of national system of education in post-revolutionary France. This project was intimately linked to the theoretical body of chemical affinities and its evolution can be followed through his net of chemistry textbooks.*

Key words: *Fourcroy, chemistry teaching, chemical affinities, French revolution*

### **Qui era Antoine-François Fourcroy?**

Durant els mesos de febrer i març de 1808, diversos delegats de l'Institut de France van presentar davant l'emperador Napoleó Bonaparte els informes corresponents al progrés de les ciències, les lletres i les arts a partir del 1789. El naturalista Georges Cuvier va ser l'encarregat de presentar l'informe sobre la química, la història natural i les ciències d'aplicació. Quant a la química, Cuvier va destacar Fourcroy, Berthollet i Guyton de Morveau com els principals químics de l'època (Cuvier, 1810: 79). Aquest article tracta sobre el primer d'aquests químics, A. F.



Fourcroy, i el seu paper com a organitzador de la química i també del seu ensenyament a la França postrevolucionària.

Antoine-François Fourcroy va ser un personatge polifacètic. Va compartir les seves recerques químiques amb unes excel·lents habilitats comunicatives com a professor i, també, amb els seus compromisos tant en la política com en l'administració. Va ser en aquest últim camp on Fourcroy, a partir de 1794, es va implicar en l'organització de l'ensenyament superior a França. Un estudiant de Fourcroy al Muséum d'Histoire Naturelle es va fer ressò del seu domini d'estratègies retòriques per a captar l'atenció dels seus estudiants (Raymond-Latour, 1836: 167-168).

A part dels seus cursos privats de química i d'història natural,<sup>1</sup> Fourcroy va rebre el 1783 el seu primer nomenament públic com a professor de física general i química a l'École Vétérinaire d'Alfort. La seva reconeguda reputació com a professor de química va fer que Buffon recomanés el seu nomenament com a professor de química al Jardin des Plantes el 1784, on va ensenyar fins a la seva mort, el 1809.

Fourcroy va introduir en les seves classes les idees de la nova química de Lavoisier. Així doncs, els seus alumnes es van convertir en testimonis privilegiats de la profunda transformació que experimentava la química en aquell moment. Però Fourcroy també va ser, i potser principalment, un prolífic autor de llibres de text de química amb una notable influència sobre altres autors.

### Un projecte per a ensenyar i organitzar la química en la França postrevolucionària

A partir de 1786, Fourcroy es va dedicar a dissenyar un projecte tant per a l'organització com per a l'ensenyament de la química. Un projecte que es pot anar seguint a través dels seus llibres de text de química. Així, entre els anys 1786 i 1789, en les edicions segona i tercera del seu conegut i famós llibre de text *Éléments d'Histoire Naturelle et de Chimie*, Fourcroy va insistir en la necessitat d'un projecte per a simplificar l'ensenyament de la química per tal de fer-la més accessible als estudiants:

[...] aquest mètode elemental de tractar tota la química en general cal considerar-lo només com un projecte, la importància i utilitat del qual mereixen l'atenció dels físics.<sup>2</sup>

La primera fase d'aquest projecte es va dur a terme entre els anys 1792 i 1797, coincidint amb les dues primeres edicions d'un altre important llibre seu: *Philosophie Chimique*.<sup>3</sup> Fourcroy va intentar en aquest llibre condensar tot el coneixement químic en dotze títols, ordenats atenent a la seva creixent complexitat i representant cadascun d'ells un fenomen general important (Fourcroy, 1792: 5-6):<sup>4</sup>

1. A més d'aquests cursos (de 1778 a 1792), Fourcroy també va impartir un curs privat sobre *materia medica* (de 1782 a 1785) i un curs de dotze conferències sobre gasos de 1785 a 1791 (Smeaton, 1962: 7-9).

2. «[...] cette méthode élémentaire de traiter toute la chimie dans des généralités, ne doit être encore regardée que comme un projet dont l'importance et l'utilité méritent de fixer l'attention des physiciens.» (Fourcroy, 1789: 5, 168). Aquests *Éléments* es corresponien amb la segona edició del primer llibre de text de Fourcroy, *Leçons élémentaires d'histoire naturelle et de chimie* (1782). La segona edició dels *Éléments* es va escriure adoptant la teoria antiflogística i utilitzant la nova nomenclatura química. En 1787 Fourcroy va publicar el llibre *Principes de chimie*, que formava part de la *Bibliothèque universelles des dames*. Va escriure aquest llibre especialment per a les dones que, segons ell, no eren prou llestes com per comprendre idees abstractes. En aquesta mateixa línia, va pensar que el llibre també seria adequat per als que s'iniciaven en l'estudi de la química atès que només es presentaven els principis més senzills i generals de la química (Smeaton, 1962: 180-184). Totes les traduccions al català són de l'autor.

3. Fourcroy va fer conèixer les fases de l'execució del seu projecte en els seus *Tableaux synoptiques de chimie* (Fourcroy: 1800: 5).

4. La tercera i última edició del llibre es va publicar el 1806 i es va reimprimir el 1823.

1. L'acció de la llum
2. L'acció del calòric
3. L'acció de l'aire en combustió
4. La naturalesa i l'acció de l'aigua
5. La naturalesa de les terres i la formació d'àlcals, el seu paper en les combinacions
6. La naturalesa i propietats dels cossos combustibles
7. La formació i descomposició dels àcids
8. La unió d'àcids amb terres i àlcals
9. L'oxidació i la dissolució dels metalls
10. La naturalesa i la formació de substàncies vegetals
11. La transició de la matèria vegetal a l'estat de matèria animal i la naturalesa d'aquesta última
12. La descomposició espontània de substàncies vegetals i animals

Segons Fourcroy, aquests fenòmens comprenien els diferents canvis que les substàncies podien experimentar sota l'acció de l'afinitat química.<sup>5</sup> Per altra banda, Fourcroy estava molt interessat a mostrar com aquests fenòmens estaven relacionats amb les propietats dels gasos, i a creure que un coneixement profund de la química dels gasos era la clau per a la comprensió de tota la química:

Està demostrat que avui dia potser no existeix cap fenomen químic en el qual no es produeixi la separació o la fixació d'un fluid elàstic i, de vegades, fins i tot, ambdues alhora.<sup>6</sup>

*Philosophie chimique* va resultar ser un llibre molt popular entre els que començaven a estudiar química i es va recomanar com a guia per a estudiants de primer curs de l'École Polytechnique. La tercera edició del llibre també va ser prescrita com a llibre de text per a cursos de química en els *lycées* el 1809. Aquesta concepció axiomàtica de la química exposada en la *Philosophie Chimique* va ser la base per a l'organització de la disciplina que Fourcroy va presentar el 1800 en una altra obra emblemàtica seva *Tableaux Synoptiques de Chimie*. En aquest punt va començar la segona fase del projecte de Fourcroy:

Ja fa força temps que he estat meditant oferir als estudiants les nocions elementals de la química en forma d'enunciats molt concisos i, sobretot, de disposar-les tot seguint la sèrie metòdica d'idees en la qual he aconseguit ubicar-les durant vint anys de treball, per comunicar-les als alumnes que segueixen les meves lliçons. La filosofia química és l'execució de la primera part d'aquest projecte i les taules que avui publico en són la segona part i la continuació necessària.<sup>7</sup>

5. Fourcroy havia presentat primerament una llista de setze títols a les edicions segona i tercera dels *Éléments* (Fourcroy, 1786: 1, lxxv-lxxvi; 1789: 5, 168). En les edicions posteriors dels *Éléments*, el nombre d'aquests fenòmens generals es va reduir a catorze. Aquesta llista es va reduir encara més, a dotze títols, a l'article «Axiomes» del segon volum de l'*Encyclopédie Méthodique, chimie* (1792). Aquest mateix any, l'article es va reimprimir en el llibre *Philosophie chimique*.

6. «Il est démontré aujourd'hui qu'il n'existe peut-être point un seul phénomène chimique dans lequel il n'y ait ou dégagement ou fixation d'un fluide élastique, et quelquefois même l'un et l'autre en même temps.» (Fourcroy, 1789: 5, 167)

7. «Il y a longtemps que je médite d'offrir aux étudiants les notions élémentaires de la chimie, sous la forme d'énoncés très concis, et surtout de les disposer suivant la série méthodique d'idées dans laquelle je suis parvenue à les placer par un travail de vingt années, pour les communiquer aux élèves qui suivent mes leçons. La philosophie chimique est l'exécution de la première partie de ce projet, et les tableaux que je publie aujourd'hui en sont la seconde partie et la suite nécessaire.» (Fourcroy, 1800: 5)

Fourcroy va elaborar les dotze taules següents:<sup>8</sup>

Taula 1	Generalitats de la química. Química mèdica
Taula 2	Les substàncies simples i oxidades
Taula 3	Les bases salificables i les sals
Taula 4	Les sals (continuació)
Taula 5	Les sals (continuació)
Taula 6	Els metalls en general
Taula 7	Els metalls en particular
Taula 8	Els metalls (continuació)
Taula 9	Els metalls (continuació)
Taula 10	Els metalls (continuació i conclusió)
Taula 11	Química vegetal
Taula 12	Química animal

Cal remarcar que la percepció que el coneixement de tota la química podia resumir-se en aquestes dotze taules proporcionava una perspectiva que revelava tant l'autoritat de Fourcroy en química, com la creença que la química estava fonamentada en uns coneixements racionalment organitzables.

Els *Tableaux* també van ser importants per una altra cosa, perquè van revelar un canvi en la metodologia que fins aleshores Fourcroy havia adoptat per ensenyar química. La inicial aproximació històrico-natural de la química, com a disciplina relacionada amb la farmàcia, la història natural i la medicina, va donar pas a una comprensió més «química» de la disciplina, que va posar l'accent més en les propietats químiques de les substàncies i no tant en les seves característiques externes:

Durant més de quinze anys he seguit, com tots els meus predecessors en la carrera de l'educació química, el mètode dels naturalistes. Com ells, també classificava els cossos en tres regnes i els examinava successivament en l'ordre en què solien col·locar-los. Des de fa quatre anys, sobretot, he notat que aquesta manera de fer no era la més adequada ni per a estudiar ni per a ensenyar química. En tenir la química una finalitat i, especialment, uns procediments molt diferents dels de la història natural, li calia un itinerari particular, una classificació dels cossos a partir de les seves propietats químiques que havia de substituir les divisions basades en les seves característiques externes o en la seva estructura aparent.<sup>9</sup>

Aquest canvi metodològic és significatiu perquè va determinar els criteris que Fourcroy va utilitzar per a compondre aquestes dotze taules sinòptiques. Fourcroy va elaborar les taules sinòptiques guiat

8. A l'annex 1 es pot veure com era el format de les taules sinòptiques de química de Fourcroy.

9. «Pendant plus de quinze années j'ai suivi, comme tous mes prédécesseurs dans la carrière de l'enseignement chimique, la méthode des naturalistes. Avec eux et comme eux je partageais les corps en trois règnes, et je les examinai successivement dans l'ordre où ils ont coutume de les placer. Mai j'ai senti, depuis quatre ans surtout, que cette marche n'était pas la plus convenable à l'étude, ni à l'enseignement de la chimie; que la science chimique ayant un but et surtout des procédés très différents de ceux qui appartiennent à l'histoire naturelle, elle devait se faire une route particulière; qu'une classification des corps, tirée de leurs propriétés chimiques, devait y être substituée aux divisions fondées sur leurs caractères extérieurs ou sur leur structure apparente.» (Fourcroy, 1800: 6)

per dos criteris. El primer criteri consistia a ordenar les substàncies químiques segons la seva complexitat en aquestes vuit classes, des de les substàncies simples fins a les substàncies vegetals i animals:

1. Substàncies simples o no descompostes
2. Substàncies oxidades
3. Bases salificables
4. Sals
5. Metalls
6. Substàncies minerals
7. Compostos orgànics vegetals
8. Compostos orgànics d'animals

El segon criteri consistia a assignar l'afinitat química com la propietat més adequada per a establir les distincions i les relacions entre aquestes vuit classes de substàncies (fig. 1).

Resulta [...] que les atraccions químiques que els cossos s'exerceixen recíprocament poden utilitzar-se com a caràcters per a ordenar-los. Per aquesta sola disposició i per l'ordre que permeten introduir, poden servir per a traçar de manera tan exacta com precisa totes les seves propietats químiques.<sup>10</sup>

La segona taula, en particular, ofereix l'oportunitat de mostrar com l'afinitat química es va convertir en el factor organitzatiu principal del contingut de cada taula. Aquesta segona taula ordenava algunes substàncies simples (des de l'hidrogen fins als metalls) seguint l'ordre de la seva combustibilitat, és a dir, de la seva afinitat per l'oxigen (fig. 2).<sup>11</sup> A més, els òxids i els àcids es classificaven tant d'acord amb la seva afinitat per l'oxigen com també per la seva dificultat per descompondre's.

Veiem que aquesta disposició, fonamentada en la principal propietat química [i.e. l'afinitat química], pretén atraure l'atenció i fixar-se en la memòria dels estudiants.<sup>12</sup>

Fourcroy va considerar que les seves taules formaven realment una mena de taula sinòptica global del seu tractat *Système des connaissances chimiques* que estava a punt de publicar-se. Aquesta obra va constituir una veritable enciclopèdia de química, però no anava destinada als principiants, sinó a estudiants de cursos avançats i a professionals de la química.

Fourcroy va confeccionar els *Tableaux* a partir dels seus cursos a l'École de Médecine de París, per tal de presentar els principis de la química als seus alumnes. Les taules també van ser recomanades als estudiants de primer curs de l'École Polytechnique i Fourcroy també considerava que podien ser útils per als professors de les escoles centrals que ensenyaven química per primera vegada. El

---

10. «Il est résulté [...] que les attractions chimiques, exercées réciproquement par les corps, employées comme caractères pour les disposer entre eux, peuvent servir par cette seule disposition, par l'ordonnance qu'elles permettent d'y introduire, à tracer, d'une manière exacte autant que précise, l'ensemble de leurs propriétés chimiques.» (Fourcroy, 1800: 7)

11. La llum, el calòric, l'oxigen i l'azot (nitrogen) estaven disposats segons la seva massa i abundància.

12. *On voit que cette disposition, fondée sur la principale propriété chimique, est destinée à frapper l'attention et à fixer la mémoire de ceux qui étudient* (Fourcroy, 1800: 9)

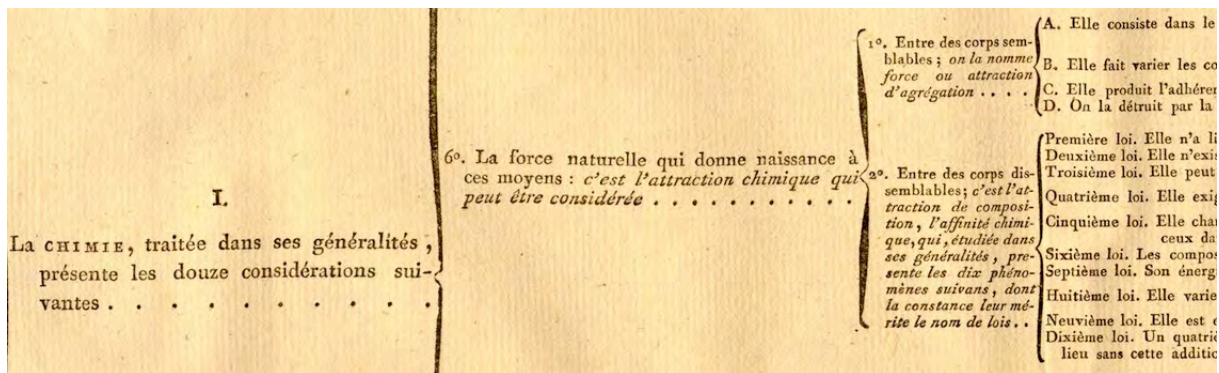


FIGURA 1. Vista parcial de la primera taula (annex 1)

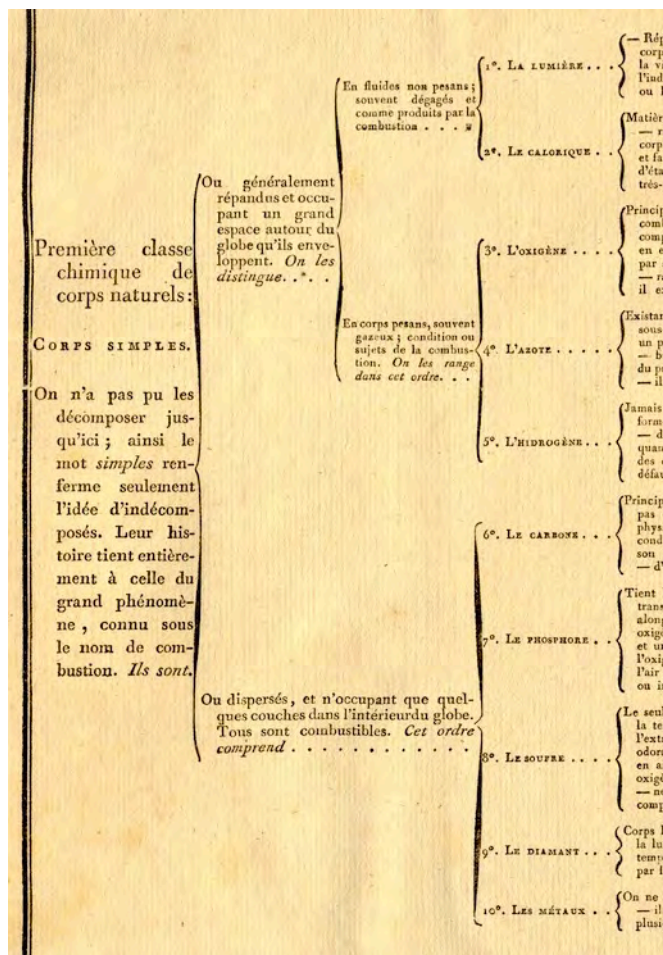


FIGURA 2. Vista parcial de la segona taula

1806, vint anys després de la seva idea inicial, Fourcroy va presentar la versió definitiva del seu projecte en la darrera edició del seu llibre *Philosophie Chimique*.

### El projecte de Fourcroy en el seu context social

En aquest punt, és important reconèixer que allò que va ser central en el programa de Fourcroy per a l'ensenyament de la química era que les afinitats químiques formaven la seva columna vertebral i que constituïen un model explicatiu dels fenòmens naturals.



El compromís actiu de Fourcroy en assumptes polítics havia començat el 1793 quan va ser elegit membre del Comité d'Instruction Publique, on es va ocupar principalment de plans per a l'educació superior. La carrera política de Fourcroy va assolir el seu punt àlgid el 1802 amb la presentació d'un projecte legislatiu per a una reforma completa del sistema educatiu. Aquest projecte va acabar l'any 1808 amb l'organització dels diferents centres de la universitat imperial que s'havia creat recentment a França, com una institució dedicada exclusivament a l'ensenyament públic per a tota la nació. L'experiència que Fourcroy havia acumulat en l'administració el va ajudar a elaborar el seu projecte per a l'organització de l'ensenyament de la química però, paral·lelament, la seva concepció dels fenòmens químics també va influir en la seva visió d'un sistema educatiu per a tota la nació.

[...] atès que aquestes [escoles secundàries, escoles especials i escoles d'aplicació] totes tenen afinitats íntimes, també cal que tinguin influències recíproques unes amb les altres. Els estudiants de les primeres (escoles secundàries) poden esdevenir estudiants de les segones (escoles especials i escoles d'aplicació), l'emulació duplicarà els seus esforços i el profit que resultarà d'aquesta competició redundarà en la prosperitat pública.<sup>13</sup>

En aquest paràgraf corresponent al projecte presentat per Fourcroy el 1802 es pot veure com la noció que tenia Fourcroy d'un canvi químic governat per unes afinitats químiques que confluen per formar noves substàncies estava latent en la idea del canvi que els diversos centres de la universitat imperial, actuant conjuntament, podien generar en els estudiants, i així procurar ciutadans útils a la nació. És a dir, de la mateixa manera que ho feien les afinitats químiques, actuant conjuntament entre les substàncies i generant nous compostos químics.

Així doncs, es pot concloure que el projecte que tenia Fourcroy per organitzar tant la disciplina de la química com el seu ensenyament va estar involucrat en el procés social i polític que va conduir finalment a l'establiment d'un nou sistema educatiu a la França postrevolucionària.

---

13. «[...] puisqu'elles [lycées, écoles spéciales et écoles d'application] ont toutes des affinités íntimes, elles doivent avoir aussi des influences réciproques les unes des autres. Les élèves des premières peuvent devenir les élèves de seconde, l'émulation doublera leurs efforts, et le bien qui doit résulter de ce concours rejaillira tout entier sur la prospérité publique.» (Fourcroy, 1822: 103)

## Referències bibliogràfiques

CUVIER, G. (1810), *Rapports à l'Empereur sur le progrès des sciences depuis 1789 et sur l'état actuel*, Paris, Imprimerie imperial.

FOURCROY, A. F. (1789), *Éléments d'histoire naturelle et de chimie*, 5 vol., Paris, Cuchet.

FOURCROY, A. F. (1792), *Philosophie chimique ou vérités fondamentales de la chimie moderne, disposées dans un nouvel ordre*, Paris, s.n.

FOURCROY, A. F. (1800), *Tableaux synoptiques de chimie, pour servir de résumé aux leçons données sur cette science dans les écoles de Paris*, Paris, Badouin.

FOURCROY, A. F. (1822), «Exposé des motifs du projet de loi présenté au corps législative par le conseiller d'état Fourcroy – Séance du 30 germinal an 10 (20 avril 1802)». A: *Choix de rapports, opinions et discours prononcés à la Tribune Nationale depuis 1789 jusqu'à ce jour; recueillis dans un ordre chronologique et historique*, tome XVIII – Années 1802-1804 (Consulat – Gouvernement Impérial), Paris, Alexis Eymery, 89-107.

RAYMOND-LATOUR, J. C. (1836), *Souvenirs d'un oisif*, 2 vol., Lió, Ayné fils; Paris, Person.

SMEATON, W. A. (1962), *Fourcroy. Chemist and Revolutionary, 1755-1809*, Cambridge, Heffer & Sons.



ANNEX 1. Les dues primeres taules sinòptiques de Fourcroy

**PREMIER TABLEAU.**  
Généralités de la chimie ; chimie médicale.

(Publié par A. F. Fourcroy, en bramaire de l'an 8, pour servir de résumé aux deux premières leçons de l'école de médecine de Paris.)

1° Sa définition . . . . .	Chimie est une science qui fait connaître l'action intime et réciproque des corps de la nature les uns sur les autres. Elle étend cette définition à tout ce qui est susceptible de se décomposer, ou de se combiner.
2° Sa nomenclature . . . . .	Elle est fondée sur la composition chimique des corps, et sur les propriétés qu'ils ont de se combiner, ou de se décomposer.
3° Ses rapports avec d'autres sciences . . . . .	Avec la physique, la météorologie, l'astronomie, l'histoire naturelle, la médecine, la pharmacologie, l'agriculture, l'économie publique, le droit, etc.
4° Ses divisions . . . . .	Elle se divise en chimie générale, et en chimie particulière. La chimie générale se divise en chimie minérale, et en chimie végétale. La chimie minérale se divise en chimie des métaux, et en chimie des sels. La chimie végétale se divise en chimie des végétaux, et en chimie des animaux.
5° Ses principes . . . . .	Le principe est la partie simple d'un corps qui ne peut être décomposée, et qui est susceptible de se combiner avec d'autres principes.
6° Ses propriétés . . . . .	Elles sont la pesanteur, l'étendue, la divisibilité, la compressibilité, l'élasticité, etc.
7° Ses effets . . . . .	Elles sont la formation des corps composés, la décomposition des corps composés, la combustion, la fermentation, etc.

**II.**

1° Sa définition . . . . .	Chimie est une science qui fait connaître l'action intime et réciproque des corps de la nature les uns sur les autres. Elle étend cette définition à tout ce qui est susceptible de se décomposer, ou de se combiner.
2° Sa nomenclature . . . . .	Elle est fondée sur la composition chimique des corps, et sur les propriétés qu'ils ont de se combiner, ou de se décomposer.
3° Ses rapports avec d'autres sciences . . . . .	Avec la physique, la météorologie, l'astronomie, l'histoire naturelle, la médecine, la pharmacologie, l'agriculture, l'économie publique, le droit, etc.
4° Ses divisions . . . . .	Elle se divise en chimie générale, et en chimie particulière. La chimie générale se divise en chimie minérale, et en chimie végétale. La chimie minérale se divise en chimie des métaux, et en chimie des sels. La chimie végétale se divise en chimie des végétaux, et en chimie des animaux.
5° Ses principes . . . . .	Le principe est la partie simple d'un corps qui ne peut être décomposée, et qui est susceptible de se combiner avec d'autres principes.
6° Ses propriétés . . . . .	Elles sont la pesanteur, l'étendue, la divisibilité, la compressibilité, l'élasticité, etc.
7° Ses effets . . . . .	Elles sont la formation des corps composés, la décomposition des corps composés, la combustion, la fermentation, etc.

SAUDOUIN, IMPRIMEUR DU CORPS LÉGISLATIF ET DE L'INSTITUT NATIONAL.





## LA CONCEPCIÓN DIDÁCTICO-COGNITIVA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN BENITO BAILS (1731-1797)

**DOMINGO MARTÍNEZ VERDÚ**

UNIVERSIDAD DE MURCIA.

Palabras clave: *didáctica, enseñanza de las matemáticas, Benito Bails, España en el siglo XVIII*

### **The Didactic-Cognitive Conception of the Teaching of Mathematics in Benito Bails (1731-1797)**

*Summary: During the first half of the Spanish 18th century one of the most significant deficiencies in the work of the Teaching of Mathematics was the lack of texts in Spanish that they collect the scientific progress, which had been published in Europe since the 17th century. In this contribution we will reflect on Bails's didactic conception by analyzing the extensive prologues of his treatises published between 1776 and 1802.*

*Key words: didactic conception, the teaching of mathematics, Benito Bails, the Spanish 18th century*

### **Introducción**

Esta investigación se incardina en el estudio de la enseñanza de las matemáticas en la España del último tercio del siglo XVIII. Durante la primera mitad de dicho siglo las academias necesitaban libros de texto para sus ingenieros que estuvieran actualizados, pero no sería hasta finales del reinado de Fernando VI (1713-1759) cuando por iniciativa de Pedro Pablo Abarca de Bolea (1719-1798), conde de Aranda, surgió la necesidad de confeccionar un buen curso de matemáticas que sirviese como libro de texto con el que los alumnos pudieran alcanzar un nivel científico adecuado. Después de fracasado el intento de hacer realidad el proyecto de formar un curso matemático desde instituciones militares como la Real Sociedad de Matemáticas de Madrid, creada en 1756 y dirigida por Pedro Lucuce

(1692-1779), fue la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando de Madrid, creada en 1752, la que finalmente publicó en el último cuarto del siglo xviii dos cursos matemáticos elaborados por Benito Bails (1731-1797): *Elementos de Matemática y Principios de Matemática*, que describiremos más adelante.

El objetivo de esta comunicación es reflexionar acerca de la concepción didáctica de la enseñanza de las matemáticas en los *Elementos de Matemática* de Bails, analizando los extensos prólogos que preceden a sus voluminosos tratados, así como las múltiples consideraciones didácticas intercaladas en el corpus de su obra.

En la siguiente sección de la comunicación hacemos una breve reseña biográfica de Bails y exponemos tanto la necesidad de un curso matemático como la importancia de la matemática mixta en la obra de Bails. En la tercera sección analizamos la función didáctica y explicativa de los prólogos y detallamos las cualidades que debe requerir un texto dedicado a la enseñanza. La visión original de Bails sobre los pilares de la excelencia en la enseñanza se expone en la cuarta sección. Finalizamos la comunicación con una serie de ejemplos de notas históricas intercaladas en los prólogos y los textos.

### Cursos matemáticos de Bails

Benito Bails<sup>1</sup> nació en 1731 en Sant Adrià de Besós (Barcelona). Siendo todavía un niño, los negocios de su padre le llevaron a trasladarse a la ciudad de Perpignan (Francia), donde cursó sus primeros estudios. Posteriormente, estudió matemáticas y teología en la Universidad de Toulouse (Francia) y a los 24 años se trasladó a París donde coincidió con D'Alembert y Condorcet. Finalmente, regresó a Madrid en 1761. En 1768, Bails fue nombrado director de Matemáticas de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.

Bails poseía una importante biblioteca entre cuyos títulos se encontraban algunos de los considerados como prohibidos, lo que supuso uno de los motivos por los que sufrió persecución por parte de la Inquisición. Fue detenido en 1791, aunque ya se había hecho referencia a él en actas inquisitoriales de los años 1765 y 1779. Finalmente, y a pesar de su debilitada salud, pues desde 1772 sufría de achaques frecuentes y parálisis, fue desterrado a Granada en 1792. Tras ser liberado al año siguiente regresó a Madrid. En 1796, Bails quedó privado de razón y falleció en la capital el 12 de julio de 1797.

La Real Academia de Bellas Artes de San Fernando<sup>2</sup> fue creada por Real Decreto de 1752 durante el reinado de Fernando VI. La Academia desempeñó un importante papel en el desarrollo de diversas artes durante la segunda mitad del siglo xviii, en particular en la arquitectura, para cuyo desempeño era imprescindible tener una elevada formación en matemáticas. Pero la España de aquel momento carecía no solo de la modernidad matemática necesaria, sino que, como el mismo Bails apunta, le era muy ajena:

Enterados mas de lo que quisiéramos de que eran muy estrañas para nuestros hombres las doctrinas que íbamos á publicar, y de lo mucho que importaba saliese al público con toda la posible brevedad nuestro trabajo. (Bails, 1779: t. I, XIII)

1. Sobre la biografía de Benito Bails, véase Bédarid (1968).

2. Existen diversos estudios sobre la historia de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando como los de Bédarid (1989) o Navascués [en línea] <<http://www.realacademiabellasartessanfernando.com/es/academia/historia>>.

**E L E M E N T O S**  
**D E M A T E M Á T I C A .**

POR D. BENITO BAILS,  
*Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando,*  
*Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia,*  
*y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.*

**T O M O I I .**



**M A D R I D .**

Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M

**M.DCC.LXXIX.**

*Biblioteca Nacional de España* 

FIGURA 1. B.Bails, 1779, Portada Tomo II, *Elementos de Matemática*

Así pues, la Academia necesitaba proporcionar con prontitud unos sólidos y avanzados conocimientos matemáticos a sus alumnos, por lo que le propuso a Bails, en calidad de director de Matemáticas, la tarea de publicar un curso de arquitectura dedicado a las matemáticas.

El curso de arquitectura en principio estaba dirigido a los alumnos de dicha Real Academia. En particular, la obra enciclopédica de los *Elementos de Matemática* tenía como objetivo formar a buenos arquitectos (fig. 1). No obstante, los tratados fueron posteriormente textos de referencia en otras instituciones y se utilizaron para enseñar y formar a ingenieros, y a oficiales del ejército y de la marina.

Ahora bien, como ilustrado, Bails tenía una visión pedagógica más amplia y consideró que los conocimientos de sus tratados no estaban destinados únicamente a un determinado tipo de alumnos, sino que podían servir para formar a otros muchos estudiantes independientemente de su suerte en la vida, como según nos dice en el prólogo del segundo volumen del tomo noveno:

[...] á los discípulos de la Academia, á Arquitectos sueltos, sin patente o sin uniforme, á quienes jamás tocará la suerte de tener á su cargo alguno de aquellas obras que por antonomasia se llaman Reales. (Bails, 1790: t. IX, v. II, I)

Bails cumplió así con el encargo aunque elaborando no uno sino dos cursos de matemáticas. Uno de carácter enciclopédico o «Curso Grande», cuyo título final fue *Elementos de Matemática* (1779-

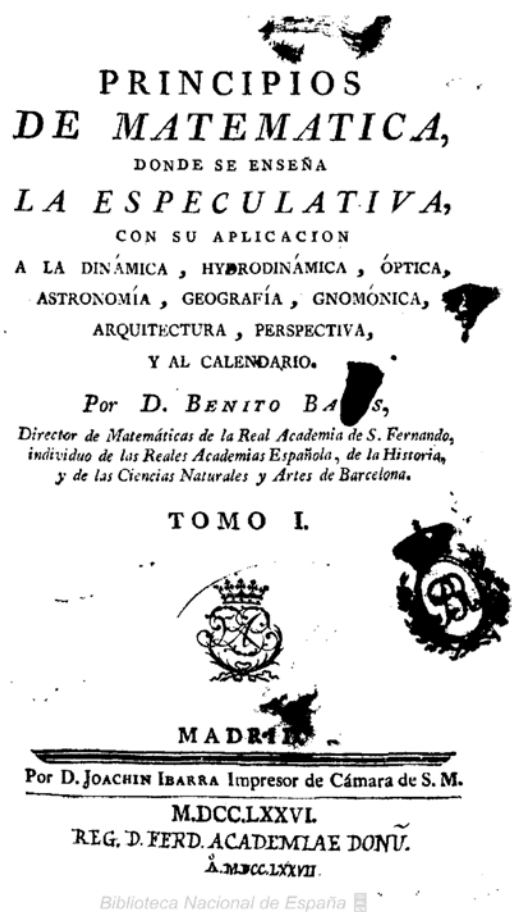


FIGURA 2. B.Bails, 1776, Portada Tomo I, *Principios de Matemática*

1802), compuesto por 11 tomos en 12 volúmenes. En referencia a estos tomos debemos mencionar que aunque se publicaron a partir de 1779, todos ellos, exceptuando los dos volúmenes dedicados a arquitectura (civil e hidráulica), ya habían sido escritos entre 1772 y 1776 (Bails, 1779: t. I, XVIII). Este hecho permitió a Bails preparar un segundo curso, que en realidad era una edición extractada o «Curso Pequeño» formado por tres tomos, y que bajo el título de *Principios de Matemática* se publicó en 1776, es decir, tres años antes del comienzo de la publicación del «Curso Grande» (fig. 2).

### Importancia de la matemática mixta

La estructura y el contenido del curso matemático estaban establecidos inicialmente por la Real Academia; sin embargo, Bails los modificó y los adaptó posteriormente según una concepción didáctico-cognitiva de la enseñanza orientada a resaltar la importancia de la matemática mixta como objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas.<sup>3</sup>

Y hechos cargo, dice Bails, de que, todo bien considerado, los tratados mixtos son los que más importan, sacrificamos la especulativa á la práctica. (Bails, 1779: t. I, XIV)

3. Sobre el significado de las «matemáticas mixtas» en la época y la evolución del término, véase: Massa-Esteve et al. (2001) y Brown (1991).

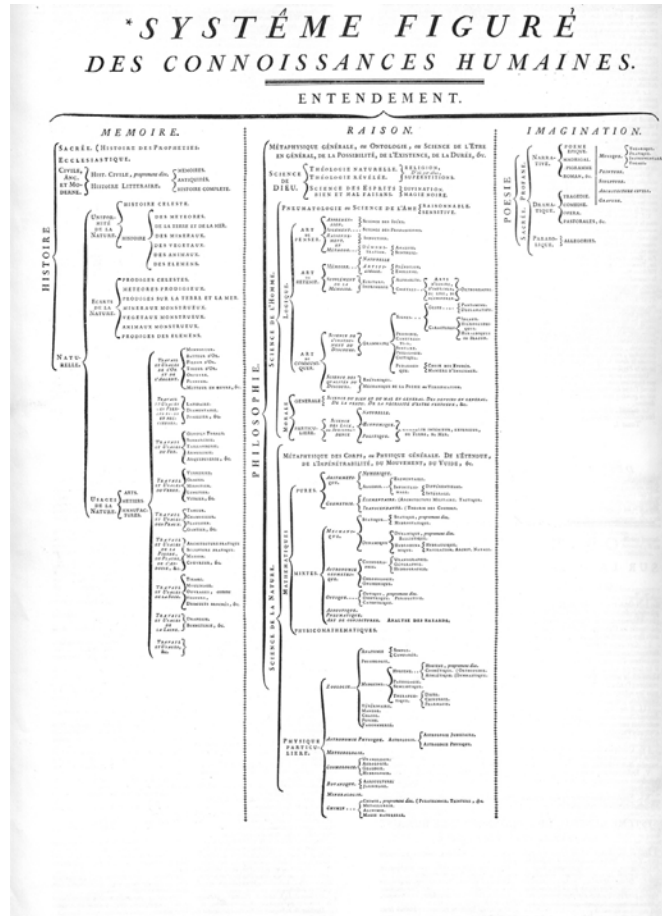


FIGURA 3. D'Alembert, 1751, Discours préliminaire de l'Encyclopédie

Bails estructuró los *Elementos de Matemática* siguiendo el esquema de división del *Système figuré des connaissances humaines* de Diderot y D'Alembert, detallado en el *Discours préliminaire de l'Encyclopédie* de D'Alembert, donde las matemáticas se subdividen en tres ramas: Mathématiques Pures, Mathématiques Mixtes y Physico-Mathématiques (fig. 3). Aunque esta última rama, que Bails consideraba distinta de la pura y la mixta (Bails, 1779: II, 246), no la incluyó en sus tratados. Así pues, con estos criterios los *Elementos de Matemática* (1779-1802) quedaron estructurados en las siguientes partes:

- Matemática Pura o Especulativa: Tomos I, II y III
- Matemática Mixta o Práctica: Tomos IV-IX<sup>4</sup>
- Tabla de Logaritmos: Tomo X
- Diccionario de Arquitectura

Con estos tratados Bails pretende que los conocimientos adquiridos sirvan para lograr el fin al que está destinada la obra, es decir, la aplicación práctica y beneficiosa que se obtiene del estudio de las matemáticas:

4. Los tomos VII, VIII y el Diccionario de Arquitectura fueron publicados de forma póstuma.



[...] ya es tiempo de que manifestemos la aplicación de estos artificios, porque en ella sola estriba todo el beneficio que resulta al género humano del estudio de las Matemáticas. (Bails, 1780: t.IV, I)

### Los prólogos

Los prólogos de los diferentes tratados que componen los cursos matemáticos de Bails resultan ser una fuente muy interesante para estudiar y conocer los diferentes aspectos históricos, matemáticos y sociales que él desarrolló con un objetivo didáctico. En la sección anterior hemos mencionado y transcrito algunos párrafos de los prólogos, lo que nos ha permitido vislumbrar cómo Bails nos proporciona información de su visión acerca de la importancia de la matemática mixta, de cuáles son los fines de ésta, o de a quiénes van dirigidos sus tratados. Desde el punto de vista de la enseñanza, Bails realiza una exhaustiva crítica de los cursos europeos de la época y los compara con el suyo. Así, en el prólogo general, incluido en el tomo primero, dedica a ello un apartado titulado «Donde se dá noticia de Algunos Cursos de matemática publicados en varios idiomas»:

Los Cursos Matemáticos que han llegado á nuestras manos no todos son completos; algunos solo tratan de la parte Especulativa, ó de la matemática Pura, y en esto se diferencian esencialmente del nuestro. Pero no por eso dexarémos de incluirlos en este cotejo. (Bails, 1779: t. I, I-II)

Otra función importante que desempeñan los prólogos es la de darnos a conocer el criterio que siguió Bails para confeccionar su obra. Por un lado, se preocupó por conocer hasta dónde habían llegado las otras naciones en el conocimiento científico de los temas que iba a tratar. Por otro, pensó que la manera más adecuada de preparar sus tratados era tomar de obras extranjeras lo mejor de ellas, con el fin de impartir una enseñanza de calidad y más modernizada:

[...] nos importa saber hasta que términos han ensanchado sus límites las demás naciones ilustradas; opino que el modo más acertado de escribir una obra castellana, que por lo menos no baxe de la medianía es echar mano de la extranjeras. [...] No tengo, ni hay otro medio de presentar á los alumnos de la Academia la mejor y más moderna instrucción. (Bails, 1790: t. IX, v. II, VIII)

Así pues, el camino que se marcó Bails para componer sus tratados fue el de aprovecharse de los adelantos y conocimientos científicos publicados por los autores europeos más reconocidos:

Solo pusimos cuidado en echar mano de las [obras] más celebradas, y enlazar con todo esmero los pedazos que para la formación de un tratado sacábamos de diferentes. (Bails, 1779: t. I, XIII)  
Siguiendo constante el plan que me propuse quando me encargué de escribir estos Elementos, he proseguido componiendo todos sus tratados de extractos de las obras mejores y más modernas, cuya publicación, poniendo yo toda la posible diligencia para saberla, llegase á mi noticia. (Bails, 1790: t. IX, v. II, VIII)

A ello debemos añadir que también realiza un análisis de los autores y una valoración crítica de sus obras científicas, lo cual constituye en cierto modo una parte de la historia de las matemáticas. Aunque no debemos olvidar que lo esencial de los prólogos es que nos revelan qué cualidades deben reunir las fuentes elegidas.

En el proceso de selección de las obras extranjeras, además de que fuesen consideradas los mejores tratados de autores europeos reconocidos, Bails aplica una serie de criterios que considera importantes desde un punto de vista didáctico-cognitivo. Los textos debían reunir cualidades tales como elegancia, sencillez, claridad, concisión, originalidad o novedad. Para ilustrarlo, veamos tres ejemplos de entre los que podemos encontrar en los prólogos:

y será acreedor á la preferencia entre todos los demás [autores], si sobre ser completísimo [su tratado] por lo que mira al número de los asuntos particulares, fuese escrito como método claro, conciso, despejado y caminaren inseparables en todo el discurso de la obra las investigaciones teóricas con las preguntas experimentales. (Bails, 1780: t. V, IX)

Dudamos que se encuentre cosa igual en esta materia [series], ya se atienda á la elegancia del método, ya á la claridad con que le propone su autor [Riccati]. (Bails, 1779: t. II, XVI)

Es seguramente la más completa y más profunda. Es obra [de Euler] verdaderamente clásica, por la extensión con que abraza el asunto [Dinámica]; *ingeniosísima*, por el método que sigue; original, por la novedad de muchas cuestiones cuya resolución se propuso; y provechosisima sobre todo, por diferentes métodos hasta entonces desconocidos que incluye para integrar muchísimas diferenciales. (Bails, 1780: t. IV, XXV)

### Los pilares de la excelencia en la enseñanza

Un aspecto muy destacable es que a través de los prólogos constatamos cómo Bails se esforzaba en alcanzar la excelencia en la enseñanza. Pues al componer sus tratados Bails no se limita a ser un mero copista-traductor de otros, sino que, si es necesario, los transforma y los adapta para hacerlos más aptos para la enseñanza. En definitiva, no se trata de copiar sino de emular lo excelente:

Lo único á que nos arrojamos fue mudar el plan de los tratados que trasladábamos, y añadirles de camino algunos pedazos de otros, fiados en que autorizaban esta licencia los fines con los que los escribíamos. (Bails, 1780: t. IV, IV)

Las obras ajenas cuando son excelentes, no pueden menos de despertar en un alma sublime lo que llamamos emulación, que es madre de toda excelencia. (Bails, 1783: t. IX, v. I, 8)

Bails consideró que los pilares sobre los que se sustenta la excelencia de toda obra destinada a la enseñanza son tres: extensión, calidad y orden:

Tres son los puntos fundamentales de toda obra doctrinal; su extensión, su doctrina, su forma, ó el número de los asuntos que trata, su calidad y su coordinación. (Bails, 1790: t. IX, v. II, I)

### Extensión

Aunque en un principio Bails se preocupó por limitar la extensión que le podía dar a su obra, sin embargo no reparó en dar una amplitud a los contenidos más allá de lo previsto inicialmente, con tal de que los «aficionados» terminasen preparados para abordar otros tratados menos elementales que el suyo. Su concepción pedagógica contemplaba la motivación de quienes quisieran realizar estudios más profundos:

[...] deseosos de que en lo que sobrase en este tomo para la cabal inteligencia de los siguientes, hallasen los aficionados un auxilio con que suplir los principios que suponen obras sobre la misma materia de mayor profundidad y extensión. (Bails, 1779: t. II, II)

### **Calidad**

La calidad de los materiales elegidos proporciona la firmeza del tratado, porque la obra debe estar a salvo de la obsolescencia el mayor tiempo posible:

Para fundar el edificio que íbamos á levantar, quisimos echar mano de los materiales más recientes, fundando en su buena calidad la firmeza de la fábrica, y procurando hermosearla con la novedad, ansioso de asegurarla los más años que pudiésemos del achaque de antiquada. (Bails, 1779: t. I, XVIII)

### **Orden**

Finalmente, en el orden reside, según Bails, la «gran diferencia que va de un libro bueno a un libro que se pueda graduar de bien hecho»:

Además de la calidad de las doctrinas que encierra un escrito, influye muchísimo en su excelencia el orden por el qual están distribuidas, cuyo orden debe ser diverso, según varía alguno de los fines principales con que se escribe. (Bails, 1780: t. IV, IV)

### **Notas históricas en los prólogos y textos**

Como ya hemos avanzado, Bails, con el objeto de facilitar la comprensión de los temas, intercalaba notas históricas y biográficas bien en los prólogos bien en el corpus de las obras, dándoles con ello una función didáctica. Veamos nueve ejemplos de temas contenidos en estas notas.

Comenzamos con una referencia a los hermanos Bernoulli. Bails finalizó el tratado dedicado a la dinámica con la resolución de cinco cuestiones, todas ellas calificadas de gran dificultad (Bails, 1780: t. IV, 511-534), y elegidas por él con el fin de poner de manifiesto cómo el cálculo diferencial e integral, considerado, según Bails (1780: t. IV, XIII), «un arcano con el qual se resolvían enigmas que se resistían á los medios usados por los matemáticos antiguos» y un invento al que no «hicieron la acogida que se merecía», era capaz de resolver con «brevedad y elegancia» las cuestiones más arduas. Esta cuestión la utiliza Bails para hacer una referencia histórica acerca de la labor de los hermanos Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748) en relación con la resolución de problemas de dinámica mediante el cálculo diferencial. Gracias a los hermanos, afirma Bails (1780: t. IV, XII), «deben los cálculos diferencial e integral la victoria que consiguieron de sus contrarios». Trata también Bails de cómo influyeron en matemáticos como D'Alembert y el marqués de L'Hospital, y finalmente se permite aconsejar al principiante que: «el estudio de las obras de Jayme [Jacob] y Juan Bernoulli será de muchísimo beneficio para todo hombre que aspire a ser matemático». Ahora bien no todo son alabanzas hacia los hermanos, pues en su nota también nos referencia las conocidas desavenencias surgidas entre los dos hermanos.

Un segundo ejemplo se presenta a partir de la obra publicada por Robert Smith (1689-1768), *Compleat System of Opticks* (1738, Cambridge), junto con dos traducciones al francés, ambas publicadas en 1767, una en Avignon por Pezenas (1792-1776), y otra por Duval-le-Roy (1739-1810) en Brest. Bails referencia en su tratado de óptica los principales descubrimientos hechos en esta materia, en particular los anteojos acromáticos, que según Bails se trata de una:

[...] doctrina toda fundada en una ocurrencia sumamente feliz del célebre Leonardo Euler. [...] Aprovechóse en Inglaterra la ocurrencia de Euler, donde se hicieron anteojos con dos especies de vidrio, llamadas una *Crown glass*, que es nuestro vidrio común, y la otra *Flint glass*, parecida á las piedras que acá llamamos de Francia. (Bails, 1781: t. VI, XV-XVI)

La óptica, como parte de la matemática mixta, es importante no solo porque proporciona beneficios a la astronomía, afirma Bails (1781: t. VI, II), sino que: «con su auxilio se ha perfeccionado la Anatomía, ha mudado de semblanza la Botánica, y [...], ha hecho inesperados y maravillosos progresos toda la ciencia de la naturaleza».

En el tercer ejemplo, Bails hace otro apunte histórico que nos permite conocer en qué estado se encontraba la resolución del problema de los tres cuerpos. Cuestión de gran dificultad para los astrónomos y que, según Bails (1780: t. IV, XV), «ha empeñado á los mayores matemáticos de este siglo, los señores Euler, D'Alembert y Clairaut, en la resolución de este problema». En este caso no usó sus propias palabras sino que transcribió las consideraciones que sobre este problema leyó Euler en una Junta de la Real Academia de Berlín el 4 de diciembre de 1765, extractadas por «Juan Bernoulli el Mozo» (Johann III Bernoulli (1744-1807)) en la página 73 del tomo 1 de *Recueil pour les astronomes* (1771-1779). Bails entrecomilló el extracto de Bernoulli:

M. Euler, dice el autor del extracto, manifiesta aquí con su acostumbrada claridad quan distantes estamos todavía de tener una resolución completa de los tres cuerpos. De sus reflexiones preliminares saca por consecuencia que no hay que esperar poder resolver este famoso problema en general, á no ser que primero se haya logrado el caso en que estén los tres cuerpos en una línea recta [...] M. Euler sujeta aquí este caso al cálculo, solo para evidenciar quan distante estamos todavía de su resolución [...]; en el estado en que se halla el Análisis parece que no se puede todavía decir si estamos, ó no muy distantes de encontrarle [...] (Bails, 1780: t. IV, XVI-XVIII)

Finaliza Bails la nota aconsejando a quienes «gustaren de ver resuelta más por extenso esta cuestión» acudan a las obras de Hennert (1733-1813), el Abate Marie (1738-1801) y sobre todo a las *Lecciones de Cálculo Integral* de M. Cousin (1739-1800).<sup>5</sup>

Continuemos con otro ejemplo que se encuentra en el tomo I de *Elementos de Matemática*. Se trata de una extensa exposición que abarca desde la página XXIV hasta la XXXIV, con notas a pie de página, acerca de los *Elementos* de Euclides y las razones por las que no ha creído conveniente adoptarlos al elaborar su tratado sobre Geometría:

[...] aunque los Elementos de Euclides han sido por muchos siglos la cartilla, digámoslo así, de los Geómetras, hemos tenido por conveniente, y necesario, no adoptarlas, siguiendo el ejemplo de muchos matemáticos de opinión, que escribieron con la mira de facilitar a los principiantes, sin el más leve perjuicio del rigor geométrico. (Bails, 1779: t. I, XXIV-XXV)

Observamos que la razón más importante que movió a Bails a tomar esta decisión fue de carácter didáctico y pedagógico, pues no le satisface, desde el punto de vista de la enseñanza, ni la coordina-

---

5. Véase Cousin (1777).

ción ni el orden en el que Euclides presenta las proposiciones en sus *Elementos*. Se justifica diciendo que ha seguido el ejemplo de muchos matemáticos de reconocido prestigio como Lechi (1702-1776), Caravelli (1724-1800), Gherli (1730-1780), Emerson (1701-1782), Simpson (1710-1761), Wolff (1679-1754), de los cuales extrae partes de sus obras.<sup>6</sup> Quizás una de las más significativas, porque creemos recoge los principios didácticos de Bails que hemos expuesto, sea la que tradujo de la obra de Gherli (1770-1777):

Aunque el método de Euclides [...] jamás se aparta del método geométrico más riguroso, cuya circunstancia esencial es dar al entendimiento exactitud, regla y precisión; sin embargo porque interrumpe continuamente el orden de las cosas, á lo que deben atribuirse en mi entender las insuperables dificultades que paran a la mayor parte de los principiantes, he tenido por acertado no seguirle [...], he procurado quitar la obscuridad, y hacer de fácil acceso aquellas proposiciones que en Euclides son el escollo de los muchachos, aunque de más que mediana capacidad. (Bails, 1779: t. I, XXXII-XXXIII)

Benito Bails mantuvo una relación muy estrecha con el marino y científico español Jorge Juan Santacilia (1713-1773). Gracias a la redacción de un informe muy favorable que hizo Jorge Juan como académico de la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando, Bails recibió el encargo por parte de la Academia (Junta Particular de 19 de septiembre de 1768), de «formar el curso de arquitectura». En agradecimiento, Bails le dedicó un extenso elogio, que elegimos como quinto ejemplo. Este elogio resultó ser una interesante biografía del marino y de su producción como científico:

Sé que tiene este ilustre varon en sus escritos mas que en los míos un monumento duradero de su memoria; pero he querido darle, aunque difunto, un testimonio de mi gratitud, porque fue voto, fue empeño suyo el que á mí se me encargara escribir estos Elementos de Matemáticas. (Bails, 1779: t. I, XLIII-LVI)

En el sexto ejemplo tratamos de los problemas que causaban la falta de un sistema de medidas universal. En su tratado de *Geometría práctica*, Bails comienza con una larga introducción histórica (Bails, 1779: t. I, 400-410) donde expone, al tiempo que se queja de ello, la multiplicidad de medidas existentes en todas las naciones y de la inexactitud matemática que ello provoca:

Consiste este inconveniente en la gran variedad de medidas que usan no solo las diferentes Naciones, sino también los varios Pueblos de una misma Nacion: siendo tan perjudicial al comercio esta multiplicidad de medidas, como contraria á la exactitud matemática.

Para resolver estos inconvenientes Bails, adhiriéndose al proyecto de Charles Marie de la Condamine (1701-1774) de una medida fija e invariable (De la Condamine, 1747: 489-514), propone reducir las medidas a una sola, es decir, implantar un sistema universal:

---

6. Sobre la cuestión de no adoptar el orden de las proposiciones que se sigue en los *Elementos* de Euclides, véase: Caravelli (1750; 1752), Emerson (1763), Gherli (1770-1777, tomo III), Lecchi (1753-1754, tomo I), Simpson (1768) y Wolff (1743-1752, tomos I y V).

[...] manifestando con los mismos argumentos que M. de Lacondamine la necesidad de reducir las estas [medidas de distancia] y las demás á solo una, y damos alguna luz acerca de los medios que en nuestro juicio podría practicar el gobierno para conseguir fin tan deseado. (Bails, 1779: t. I, XXII-XXIII)

Bails, haciendo uso de textos de otros matemáticos, completa esta digresión con otra nota histórica (Bails, 1779: t. I, XXXIV-XLI) en la que trata sobre *el pie de Rey de París* y su derivada, la *Toesa* (seis pies de Rey), como las medidas más usadas por los matemáticos europeos:

Para escusar mucha parte de la confusión que podría ocasionar su multiplicidad, han escogido los Matemáticos una medida á la qual suelen referir todas las demás. Esta medida, que hace en algún modo oficios de universal, es el pie de Rey de París sexta parte de la medida que usan los franceses con el nombre de *Toesa* [...]. (Bails, 1779: t. I, 406)

El séptimo ejemplo es una nota histórica relacionada con la arquitectura y la ingeniería civil, se trata de la *Historia del Canal del Languedoc* (1666-1681), obra del ingeniero Pier Paul Piquet (1609-1680), al que Bails dedicó más de 50 páginas (321-373) en el cuerpo del volumen segundo del tomo noveno (figs. 4-5):

Motivos de tanto peso nos obligan á dar aquí una noticia individualizada [...] para lo qual 1º, referiremos su historia; 2º daremos su descripción; 3º seguiremos todo el canal desde el Mediterráneo hasta el Garona. (Bails, 1790: t. IX, v. II, 322)

Un nuevo ejemplo nos lleva al sistema copernicano y a las Sagradas Escrituras. Al principio de nuestra comunicación hemos mencionado las dificultades que tuvo Bails con la Inquisición. Su delicada relación con esta institución religiosa le condicionó su libertad para exponer determinados temas, tal y como podemos apreciar cuando tuvo que tratar acerca de «Del Systema del mundo» (Bails, 1775: t. VII, 90-114). Bails, al igual que Jorge Juan, eligió como sistema del mundo el sistema Copernicano, «por ser el más celebrado de todos» los «mas afamados que han inventado los Astrónomos». Pero Bails, defensor de las ideas ilustradas, debía tomar sus precauciones al hablar de la teoría heliocéntrica de Copérnico (1473-1543):



FIGURA 4. Plano Canal del Languedoc (1666-1681), Ingeniero Pierre-Paul Riquet (1609-1680)



322                      *TRATADO*

por lo menos, calando los barcos menos de 5 y medio; aunque cargan 100 toneladas.

Por el año de 1664 nombró Luis XIV comisionados que exáminasen el pensamiento del canal: en 1666 se empezó: quedó concluido en 1680, y en 1681 se hizo la prueba de la navegacion. Costó entre todo cerca de 56 millones de reales de aquel tiempo.

Se regula que los reparos necesarios ascienden año con otro á 1200000 reales, y que quedan 2400000 reales año con otro de producto liquido á sus dueños, los descendientes de Riquet.

Motivos de tanto peso nos obligan á dar aquí una noticia individualizada de obra á todos respectos tan memorable; para lo qual 1.º referiremos su historia; 2.º daremos su descripción; 3.º seguiremos todo el canal desde el Mediterraneo hasta el Garona; lo que nos proporcionará hablar menudamente de sus principales obras.

*Historia del Canal de Languedoc.*

310 Si á un negociante de Bilbao se le ofrece enviar á Barcelona una porcion crecida de géneros, no tiene otro medio sino cargar una embarcacion, la qual para ir á su destino tiene que dar la vuelta á toda España, emprendiendo una navegacion muy costosa y aventurada, aunque tengamos paz con los Berberiscos. Pero si desde algun puerto de Vizcaya ó de la Montaña pudiera encaminarse el barco por algun rio ó canal navegable á su paradero, atravesando, aunque fuera con algun rodeo, las provincias que forman la separacion entre Cataluña y Vizcaya, no solo proporcionaría este arbitrio muchas ventajas á dicho negociante, y le ahorraría muchos sobresaltos, sino que tambien sería de inmensa utilidad para avivar la agricultura y alentar la industria de muchas de nuestras provincias mediterraneas y marítimas.

311 Francia, que tambien tiene provincias en ambos mares, Mediterraneo y Océano, de frutos tan diferentes, falta

*Biblioteca Nacional de España*

FIGURA 5. B. Bails, 1790, Historia del Canal de Languedoc, *Elementos de Matemática*, Tomo IX, Volumen II, 322

cuyo sistema tienen días ha muchas naciones ilustradas de Europa por el verdadero systema de la naturaleza. Pero yo, receloso de que se me dé en cara con que me está prohibido ser tan arrojado ó tan crédulo, me contentaré con proponerle sencillamente.

Y tales eran las precauciones que debía tomar Bails que, al finalizar su exposición, añadió un apartado (Bails, 1775: t. VII, 114-117) a modo de nota histórica con un significativo título: «Satisfacense los argumentos que se fundan en algunos textos de la Sagrada Escritura».

Finalizamos este apartado con un noveno y último ejemplo. Bails, al hablar del termómetro y el barómetro, le proporciona al lector una historia de la astrología física, le informa de su relación con las cosechas y las enfermedades, y de los beneficios que del conocimiento de la meteorología se pueden obtener para la agricultura, la medicina y la navegación:

Con el termómetro y barómetro se hacen principalmente las observaciones tan celebradas con nombre de meteorológicas, las quales hechas con el cuidado que su importancia requiere, pueden influir muchísimo en la salud y en conveniencias de los hombres; fundándose en ellas una especie de Astrología Física, que proporciona pronosticar las mudanzas del tiempo, y las cosechas y enfermedades que de ellas se pueden temer ó esperar. (Bails, 1780: t. V, XXIV-XXXVIII)



### **Comentarios finales**

Los prólogos resultan ser pues un medio muy útil e imprescindible para analizar y conocer la concepción didáctico-cognitiva de la enseñanza de las matemáticas en Bails. Si bien no sólo a través de dichos prólogos la podemos conocer, sino también mediante la lectura de muchos párrafos del interior del corpus matemático. Bails nos explica cómo se deben presentar los contenidos, cómo debe confeccionarse un tratado dedicado a la enseñanza, nos orienta sobre el orden en el que acometer las materias, nos sugiere los autores que hay que leer, o cómo y dónde ampliar los conocimientos. Pero lo más destacable es que toda su concepción didáctico-cognitiva se basa en dos cuestiones fundamentales: las cualidades que debe reunir un texto dedicado a la enseñanza para que esté bien hecho: claridad, elegancia, concisión y/o novedad; y los tres pilares de la excelencia en la enseñanza: extensión, calidad y orden.

## Referencias bibliográficas

- BAILS, B. (1779-1802), *Elementos de Matemática*, 11 tomos, Madrid, Imprenta de Joachin Ibarra (Imprenta Vda. de Ibarra, los tomos publicados desde 1787).
- BAILS, B. (1776), *Principios de Matemática*, 3 tomos, Madrid, Imprenta de Joachin Ibarra.
- BÉDAT, C. (1968), «Don Benito Bails, Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando desde 1768 a 1797. Su biografía, su elogio y sus dificultades con la Inquisición», *Academia. Boletín de la Real Academia de San Fernando*, 27, 24-31.
- BÉDAT, C. (1989), *La Real Academia de Bellas Artes de San Fernando (1744-1808): contribución al estudio de las influencias estilísticas y de la mentalidad artística en la España del siglo XVIII*, Madrid, Fundación Universitaria Española: Real Academia de Bellas Artes de San Fernando.
- BROWN, G. I. (1991), «The Evolution of the Term "Mixed Mathematics"», *Journal of the History of Ideas*, 52, (1), 81-102.
- CARAVELLI, V. (1750), *Euclidis Elementa quinque postrema Solidorum Scientiam continentia*, Napoli, ex typographia J. Raymundi.
- CARAVELLI, V. (1752), *Elementa matheseos. Tomus primus qui Geometriam planam, seu priores sex libros Euclidis breviter demonstratos complectitur*, Napoli, ex typographia J. Raymundi.
- COUSIN, J. (1777), *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, 2 vol., París, Chez Claude-Antoine Jombert, Fils ainé.
- DE LA CONDAMINE, CH. M. (1747), «Nouveau projet d'une mesure invariable propre à servir de mesure commune à toutes les Nations», *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, París, de l'Imprimerie Royale, 489-514.
- EMERSON, W. (1763), *The Elements of Geometry*, Londres, J. Nourse.
- GHERLI, O. (1770-1777), *Gli Elementi Teorico-Pratici delle Matematiche pure*, 7 tomos, Modena, presso la Società Tipografica.
- LECCHI, G. (1753-1754), *Elementa geometriae theoricæ, et practicæ*, Mediolani, Ex Typographia Bibliothecæ Ambrosianæ, apud Joseph Marellum.
- MASSA-ESTEVE, M. R.; ROCA-ROSELL, A.; PUIG-PLA, C. (2011), «Mixed mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century», *Engineering Studies*, 3-3, 233-253.
- NAVASCUÉS, P. *Historia de la Academia*, [en línea] <<http://www.realacademiabellasartessanfernando.com/es/academia/historia>> [Último acceso: 20/01/18]
- SIMPSON, T. (1768), *Elements of Geometry; with Their Application to the Mensuration of Superficies and Solids, to the Determination of the Maxima and Minima of Geometrical Quantities, and to the Construction of great variety of Geometrical Problems*, 3a ed., Londres, J. Nourse.
- WOLFF, C. (1743-1752), *Elementa Matheseos Univer-sae*, 5 tomos, Halle, Libreria Rengeriana.

## EL JURAMENTO HIPOCRÁTICO EN LA ENSEÑANZA MÉDICA AYER Y HOY

**MIA MENÉNDEZ MOTTA**

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN NÜRNBERG  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

Palabras clave: juramento, Hipócrates, enseñanza, historia

### The Hippocratic Oath in the Medical Teaching from Yesterday and Today<sup>1</sup>

Summary: A brief story of the use of the Hippocratic Oath in medical teaching since its creation until today with a reflexion on today's possible usage of the text.

Key words: oath, Hippocrates, teaching, history

El juramento hipocrático es un texto que forma parte de la colección conocida como *Corpus Hippocraticum*, alrededor de sesenta obras pertenecientes a Hipócrates de Cos (ca. 460- 375/351 aC) o a su escuela, las que a pesar de no ser homogéneas representan la raíz del espíritu racional de la medicina libre de toda huella de magia (Jouanna, 1999: 56). Recomendamos al lector leer el juramento hipocrático (Hipócrates, trad. 2007: 35-41, *jusj.*) para mejor entender algunas referencias hechas en este trabajo.

El juramento ha estado siempre ligado a la educación médica como mencionan Escríbonio Largo (s. I), quien nos cuenta que Hipócrates enseñó los principios de la medicina comenzando con el juramento (Anastassiou & Irmer, 2006: 290, *Comp. Ep. Ded.*, 5), y Erodiano (s. I) quien cita al juramento entre aquellas obras que hacen referencia a la enseñanza de la medicina (Erodiano, 1918: 36,19). Durante el siglo IV dC y hasta el siglo X otros autores transmitieron una versión adaptada de algunas partes del juramento como el no dar abortivos, el voto de la

---

1. Esta investigación se lleva a cabo gracias a la beca CONACYT-DAAD 2015.

morigeración sexual y el voto de sigilio. Junto a estas referencias el texto fue mencionado como la primera fase de la educación médica (Stephanus, 1998: 25-56, *Comm. in Hipp. Aph.*, I-II 30).

Durante los siglos v y vi seis tratados hipocráticos habían sido traducidos, el juramento no estaba dentro de ellos hasta que fue traducido junto con los textos de Galeno en la Escuela de la Sabiduría (*Bayt al-Hikmah*) en Bagdad, donde Hunayn Ibn Isaq (809-873) se encargó de traducir al sirio y al árabe muchas de las obras de Galeno incluidos los comentarios a obras hipocráticas. A partir de esto se desarrolló lo que hoy llamamos hipocratismo galenico-árabe (Jouanna, 1999: 361 y s.) continuando así la transmisión textual del juramento, por ejemplo, a través de algunos autores árabes como 'Alī ibn Riḍwān (ca. 988 - ca. 1068) y Al-Ruhāwī (s. ix); el primero menciona al juramento como una lectura recomendada por Galeno para estudiar medicina y como parte de los requerimientos necesarios para acceder al arte médico, pues representaban los preceptos para que la medicina pudiera ser enseñada a cualquier persona y no se quedara en un oficio familiar (Riḍwān, 1982: 14,62 - 16,76); el segundo puntualiza que antes de decidir cualquier tratamiento se debe haber leído el juramento, cumplirlo y seguir sus preceptos (Levey, 1967: 56). Otra mención importante es la de Ibn Abī Uṣaybi'ah quien dejó su *Uyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'* (*Vida de los médicos*), una traducción del juramento hipocrático que es conocida como «El texto del pacto establecido por Hipócrates». El contenido es semejante al texto del juramento preservado en manuscritos griegos de la misma época, es decir, entre los siglos x y xii aC.

La época posterior estuvo marcada considerablemente por la reproducción de manuscritos, las nuevas investigaciones sobre la antigüedad clásica, el renacimiento y el descubrimiento de la imprenta. Por todo esto la historia del juramento hipocrático se complica considerablemente dejándonos con cuatro versiones del texto: el *textus receptus* (39 ms.), o juramento pagano, el juramento hexamétrico (10 ms.), el juramento cristiano (3 ms.) y otros dos manuscritos con lecturas alternativas correspondientes a las preservadas en el Papiro de Oxirrinco (XXXI, 2447) que representan los vestigios más antiguos del texto (s. iii).

A partir del *textus receptus* se hicieron traducciones al latín (Rütten, 1996: 460-463) durante el Renacimiento. La traducción más antigua fue hecha por Constantino el Africano (1020-1087) y su versión fue incluida en las compilaciones de autores griegos y árabes realizadas a finales del siglo xv (Rütten, 2002: 44 y s.). El siguiente impulso y apropiación del juramento fue hecho por los humanistas y las universidades, donde se juraba una versión libre del texto de Hipócrates, ya sea antes de graduarse o al asumir el cargo de decano en la facultad de medicina (Grafton *et al.*, 2010: 440; Schubert, 2005: 82 y s.). Pero jurarlo no significa que haya sido aprendido, sino que el texto perteneció en esa época más a un ritual o a una tradición que a una sincera reflexión, pues el juramento ya no sólo estaba reservado a la esfera primigenia de la enseñanza, es decir a la relación entre maestros y alumnos, sino como un contrato oral para los puestos dentro de las universidades.

Entre los siglos xvi y xvii el juramento fue traducido y publicado varias veces ya sea dentro de las obras completas de Hipócrates o de algunos comentarios al juramento como son los siguientes (Rütten, 1996: 464 y s.):

Blaise Hollier (1556-1572) en su breve *In Hippocratis Jusjurandum Commentarius* (1558) menciona que el texto era pronunciado por los estudiantes de medicina al principio de la enseñanza y que precisamente por ello decidió hacer un comentario, porque no se hablaba de él en otros ámbitos. Su reflexión más importante para esta comunicación va ligada al voto de la morigeración sexual, pues dice que antes los médicos eran naturalmente prudentes y bien educados pero de alguna manera su

conducta empeoró y se volvieron flojos y hábiles con la lengua, con la que endulzan a la gente para engañarla y ganarse su aprecio. Estos malos médicos confunden el dar medicamentos con el verdadero conocimiento de la medicina y su objetivo, que es la posesión de la salud.

Jan van Heurne (1543-1601) en su comentario comenzó interpretando el juramento como una forma de piedad y la piedad es sabiduría según la Biblia (Job 28,28). El juramento es una afirmación religiosa y la mejor manera de unir los médicos en mutua confianza gracias a la invocación a los dioses. En cuanto a la relación maestro-alumno, piensa que mientras más siembres más cosecharás y sólo una buena persona sabe retribuir el beneficio que se le ha hecho. Quizá su contribución más importante es explicar que el médico no debe estar influenciado por deseos de riqueza o por la maldad sino practicar la medicina guiado por la justicia y la inocencia, un hombre bueno es aquel que hace uso de las cosas que puede pero sin dañar a nadie (Van Heurne, 1597: 6-7).

Francois Ranchin (1564-1601), médico originario de Montpellier y canciller de la misma Universidad, hizo un comentario más extenso que los anteriores y con la particularidad de haber analizado el juramento muy minuciosamente, considerándolo casi como un documento legal. Su primer apartado directamente explica: «Sobre la utilidad y necesidad de que el juramento Hipocrático sea aprendido, enseñado y ejercitado en Medicina», en donde se compara el juramento en medicina con aquel realizado por los soldados, quienes juran fidelidad al gobernante y protección para el pueblo. Hipócrates entonces es como el jefe o gobernante de todos los médicos, quizá como un embajador de los dioses Apolo y Esculapio y reuniendo a todos los estudiantes los convoca a jurar por ellos, como él mismo lo hizo. Únicamente así el próximo estudiante podía ser admitido en la «milicia de la medicina» y tener una vida y enseñanza gratificante (Ranchin, 1627: 20 y s.). Divide el juramento en tres partes principales, la *adjuratoria* o la promesa a los dioses, la *legalis* o constituciones médicas que subdivide en 8 partes y la *excecratoria* o maldición. Claramente para Ranchin las constituciones médicas eran la parte central y servían como guía para enseñar el buen comportamiento a los médicos (Ranchin, 1627: 25-41).

Finalmente llegamos a un comentario que contrasta con los otros, el de Johann Heinrich Meibom (1590-1655), por ser más largo, enciclopédico y filológico (Meibom, 1643). Su comentario es tan detallado que analiza palabra por palabra y reúne toda la información referente a ese tema, esté directamente relacionada con el juramento o no.

Para tomar un ejemplo que nos serviría para debatir en las aulas veamos la manera en que Meibom entendió la prohibición de dar abortivos. En su capítulo XVI divide en temas que pueden ser agrupados como el significado de las palabras griegas para pesario; la reglamentación jurídica sobre el aborto en distintos códigos legales; razones médicas por las que se realiza o se considera un aborto, certezas y mentiras médicas, casos famosos; la opinión cristiana al respecto a partir del Éxodo; conclusión y la sentencia áurea de Hipócrates. De esto aprendemos que si el aborto sucede por la ingestión de una poción o medicamento también es considerado aborto, no sólo como lo establecía en una primera lectura el juramento (con un pesario). Todas las leyes revisadas en el comentario establecen que el aborto es un homicidio, ya no sólo por quitar la vida sino por tener la intención deliberada de quitarla (Meibom, 1643: 133-136). A partir del Éxodo (21,22-25) se plantea el escenario de alguien que causa el aborto a la mujer, sea este médico o no, junto con la posibilidad de la muerte de la mujer misma. Al final Meibom considera también el dilema de a partir de qué fecha el feto es un ser animado y si eso debería importar en la decisión de practicar un aborto o no.

Con este comentario llegamos al final de la revisión histórica pues si bien la dejamos a finales del

siglo xvii, el más grande estudioso de Hipócrates, Emile Littré (1801-1881), tiene en su bibliografía el comentario de Meibom y éste a su vez todos los comentarios anteriores, es decir, por una clase de cadenas bibliográficas la información hasta ahora expuesta por mí sería accesible a nuestra época. Sin embargo la experiencia como docente y alumna indica lo contrario.

Mucho antes de que comenzara a estudiar historia de la medicina, tuve la oportunidad de ser docente de etimologías médicas, lectura y redacción en el curso propedéutico que se impartía a los alumnos de la Facultad de Medicina de la Universidad Nacional Autónoma de México. El último texto utilizado en clase fue el juramento hipocrático y, a pesar de haber recibido instrucciones pedagógicas sobre algunos temas especiales y materias en las que debía ponerse mayor énfasis, el juramento y sus alcances no fue uno de ellos. Mis alumnos de ese entonces, ahora médicos practicantes, conocen el juramento hipocrático pero no lo ven más que como un texto antiguo, en parte anacrónico y desactualizado que significa muy poco para su profesión. Algunos de ellos, empero, son un poco más sensibles hacia el significado de su profesión y la tradición e historia de la que desciende.

Pensé que no estaba en mi deber ni en el de los profesores del primer año hacerles ver la importancia de su profesión puesto que ese período presenta el mayor número de bajas estudiantiles. Más tarde, cuando cursé la maestría en historia de ciencias de la salud, tuve la oportunidad de tener como profesores a los mismos que se encargaban de impartir la materia obligatoria de historia y filosofía de la medicina en el cuarto año de la licenciatura en medicina. Ellos abordan en clase el tema del juramento hipocrático, un par de ellos con el énfasis que se le ha dado a lo largo de la historia; el juramento, sin embargo, no permanece en la memoria de los alumnos ni mucho menos es utilizado como guía. Muchos de los que lo recuerdan (digamos un 50 %) es simplemente porque en la universidad la tradición es leer una versión en español al final de la enseñanza en aulas y antes del periodo de prácticas (servicio social, residencias). Esta información la obtuve haciendo cuatro sencillas preguntas a todo médico que conozco sin importar la nacionalidad (aprox. 40): ¿Conoces el juramento hipocrático? ¿Cuándo y en qué circunstancias lo conociste? ¿Consideras sus preceptos en tu praxis médica diaria? ¿Consideras que ha influenciado alguna de tus decisiones médicas? Las respuestas generales fueron: Sí; Al salir de la carrera porque tuvimos que leerlo; No; No.

Pensé que quizá era un problema local pero una vez en Alemania cursé dos clases en el Departamento de Ética e Historia de la Medicina en la Universidad en la que actualmente escribo mi doctorado. Una de ellas fue introducción a la ética médica, en la que jamás se hubiera mencionado el juramento hipocrático si no es porque fui invitada a exponer sobre mi proyecto de tesis de doctorado por ser una asistente especial. Mis compañeros de clase jamás habían oído hablar de Hipócrates a pesar de que el jefe del Departamento es muy consciente y sensible a la tradición e historia de la medicina. Entonces surgen todas estas preguntas que contraponen una realidad ambigua del presente con una, quizá, ilusoria del pasado. ¿Por qué una minoría de los médicos practicantes sólo se acuerda del juramento cómo ese texto que dicen de manera ritual al final de la carrera? ¿Por qué los comentarios al juramento hipocrático actuales son básicamente filológicos sin acercarlo a la realidad o apropiárselo? Si existen grandes ejemplos como Ranchin o Meibom, ¿en qué momento el texto se volvió sólo un ritual y ya no la apertura de la enseñanza médica? ¿Por qué su importancia y uso ha quedado rezagado a una breve reseña en las clases de historia de la medicina? ¿Se formarían mejores médicos si se hiciera énfasis en retomar el significado del texto y recontextualizarlo? Creo que ahora se debería enfatizar que la medicina es un saber privilegiado por el poder que conlleva y su objeto de estudio. Hemos visto cómo a lo largo de la historia el texto sobrevivió y fue adaptado gracias a su

función normativa y de apertura de la praxis médica; después los comentarios ayudaron a modernizar el texto, a recontextualizarlo y a entenderlo desde la nueva realidad social, es decir, fue reivindicado y se mantuvo en boga, se utilizó como conducto o herramienta de «aleccionamiento moral» dentro de las aulas, quizá, hasta de rescatar la grandeza del arte médico. Hoy no es más que un decir al final de las enseñanzas médicas aún cuando en la praxis hay una seria necesidad de reflexión y concienciación éticas. Probablemente hay otros conductos pero, ¿por qué no utilizar el juramento?, ¿y si hiciéramos que todos nuestros futuros médicos estuvieran conscientes de lo que el juramento dice? Si les enseñáramos una pequeña parte de los múltiples énfasis de los comentarios, ¿valorarían ellos mismos más su praxis, su papel en la sociedad? ¿Cómo podríamos rescatar el juramento en las aulas para que éste nos ayude a retornar a la medicina tal como Hipócrates la imaginó al hacerla accesible a cualquiera? Es necesario no olvidar que «La vida es breve; la ciencia, extensa; la ocasión, fugaz; la experiencia, insegura; el juicio, difícil» (Hipócrates, 2007: Aph. I, 1).



## Referencias bibliográficas

- RIDWÂN, 'ALÎ IBN (1982), *Über den Weg zur Glückseligkeit durch den ärztlichen Beruf*, ed. trad. Albert Dietrich, Göttingen, Vandenkoeck & Ruprecht.
- ANASTASSIOU, A.; IRMER, D. (2006), *Testimonien zum Corpus Hippocraticum. Teil I: Nachleben der hippokratischen Schriften bis zum 3. Jahrhundert n. Chr., (I)*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.
- BLAISE, H. (1558), *Vivariensis Doctoris Medici in Hippocratis Iusiurandum Commentarius*, Basilea, Ioan Oporinus.
- EROTIANO (1918), *Erotiani vocum Hippocraticarum collectio cum fragmentis*, ed. E. Nachmanson, Göteborg, Eranos.
- GRAFTON, A.; MOST, G.; SETTI, S. (ed.) (2010), *The classical tradition*, Cambridge, The Belknap Press of Harvard University Press.
- HIPÓCRATES (2007). *Tratados*, Trad. Ma. D. Lara Nava, C. García Gual, J. A. López Férez, et al., Madrid, Gredos.
- JOUANNA, J. (1999), *Hippocrates*, Baltimore y Londres, John Hopkins University Press.
- LEVEY, M. (1967), «Medical Ethics of Medieval Islam with special reference to Al-Ruhâwî's "Practical Ethics of the physician"», *Transactions of the American Philosophical Society*, 57, (3), 1-100.
- MEIBOM, J. H. (1643), *Hippocratis magni ORKOC sive iusiurandum*, Leiden, Jacobus Lauwickius.
- RANCHIN, F. (1627), *Opuscula Medica, utili, iocundaque rerum varietate referta*, Leiden, Petrum Ravd.
- RÜTTEN, T. (1996), «Receptions of the Hippocratic 'Oath' in the Renaissance: the prohibition of abortion as a case study in reception», *Journal of the History of Medicine*, 51, 460-463.
- RÜTTEN, T. (2002), «Hippocrates and the Construction of 'Progress' in Sixteenth and Seventeenth century Medicine». En: CANTOR, D. (ed.), *Reinventing Hippocrates*, Aldershot, Ashgate, 37-58.
- SCHUBERT, CH. (2005), *Der hippokratische Eid. Medizin und Ethik von der Antike bis heute*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- STEPHANUS (1998), *Stephani Atheniensis in Hippocratis Aphorismos commentaria I-II. Corpus Medicorum Graecorum XI 1,3,1*, Berlin, L. G. Westerink.
- VAN HEURNE, I. (1597), *Hippocratis Coi Prolegomena et prognosticorum libri tres: cum paraphrastica versione et breuibus commentariis*, Leiden, Franciscus Pahelengius.

## MAONS, ALTARS I VERSOS: ELS SINGULARS MÈTODES DE TRANSMISSIÓ DELS CONEIXEMENTS MATEMÀTICS I ASTRONÒMICS A L'ANTIGA ÍNDIA

**CARLES PUIG-PLA;<sup>1</sup> IOLANDA GUEVARA CASANOVA<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA. UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

<sup>2</sup> DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

Paraules clau: *matemàtiques a l'antiga Índia, cultura d'Harappa, Sulbasutras, Siddhantes, Aryabhata*

### **Bricks, Altars and Verses. The Singular Methods for the Transmission of Mathematical and Astronomical Knowledge in Ancient India**

Summary: *In the Indian subcontinent the civilization of the Indus, one of the oldest civilizations, was developed. From the beginning, they had knowledge of basic geometry and metrology and, over time, important achievements in astronomy and maths were reached. It was the so-called classical period (400-1200) with such prominent personalities as Aryabhata, Brahmagupta or Bhaskara II. This long development happened through different stages in which the transmission and learning of knowledge was done using singular mechanisms. They involved aspects related to commerce and technology (civilization of the Indus 2500-1800 BC), ritualistic, religious and linguistic structures (Vedic age 1500-500 BC), non-theist cosmological ideas (Jainism 500-200 BC) and Sanskrit astronomical texts (siddhantas) written in cryptic verses (ca. 4th century onwards).*

Key words: *Mathematics in ancient India, culture of Harappa, Sulbasutras, Siddhantas, Aryabhata.*

### **Maons per a construir ciutats; pesos i mesures per a comerciar**

Una de les civilitzacions més antigues de la humanitat, la civilització de l'Indus, es va desenvolupar al nord-oest del subcontinent indi. Sovint ens hi referim també

com a la civilització o cultura d'Harappa, tot destacant la primera i principal ciutat que va ser excavada a la dècada de 1920, Harappa. Aquesta civilització, els orígens de la qual es poden remuntar al 7000 aC o al 6000 aC (National Geographic, 2012), va abastar dos mil·lennis, del 3200 aC al 1300 aC, tot i que des del punt de vista dels avenços tecnològics el seu màxim desenvolupament va tenir lloc entre el 2600-2500 aC i el 1900-1800 aC. Posteriorment es va produir un declivi, les raons del qual no han estat del tot explicades, quan les tecnologies clau van quedar fora d'ús i la població va anar abandonant progressivament els nuclis urbans (Khan & Lemmen, 2014).

Diferents jaciments arqueològics (Mehrgarh, Harappa, Mohenjo-Daro, Dholavira, Lothal,...) mostren una societat organitzada amb un notable grau d'urbanització. Aquesta civilització va planificar i construir ciutats amb edificis de maó (fig. 1). Tenien infraestructures per a conservar l'aigua, disposaven de canals, embassaments, sistemes de drenatge i clavegueram (National Geographic, 2014) i van tenir, naturalment, coneixements matemàtics.

Els maons representen una gran part del material arqueològic que aquesta civilització ens ha deixat i constitueixen una característica seva que ha permès conèixer la distribució de les seves ciutats i nuclis de població en l'espai geogràfic. Inicialment, van usar maons de fang, els quals ja es troben el 7000 aC a l'assentament arqueològic de Mehrgarh, a la província de Balutxistan, al Pakistan. Posteriorment van usar els maons cuits, que apareixen a Jalilpur, cap al 2800 aC (Khan & Lemmen, 2014: 3).

La complexitat d'una civilització com aquesta va comportar l'establiment de mesures comunes de longitud i de pes per a la recaptació d'impostos i l'activitat comercial. L'intercanvi de mercaderies no només va tenir lloc entre les ciutats de la vall de l'Indus, sinó fins i tot amb Mesopotàmia. Des de la ciutat portuària de Lothal, a la desembocadura de l'Indus, mercaders d'Harappa i Mohenjo-Daro van comerciar amb els sumeris entre el 2300 aC i el 2000 aC.

L'emergència d'una metrologia lligada a la tecnologia i al comerç es posa de manifest en escales i instruments per a mesurar. Un fragment de petxina de 66,2 mm de longitud dividida en deu parts iguals per nou línies paral·leles a una distància mitjana de 6,7 mm, té dues línies assenyalades de forma diferent; la distància entre elles s'ha denominat «polzada de l'Indus» (33,5 mm) i s'ha destacat la seva equivalència amb el doble del *sushi*, unitat de longitud sumèria (Joseph, 1996: 304-305).

La cultura Harappa va utilitzar un sistema estandarditzat de pesos basats en les proporcions: 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 i 500. A les excavacions de Lothal s'ha trobat una gran quantitat de pesos en forma d'hexàedres; si es pren la peça més freqüent com a unitat (27,6 grams), llavors n'hi ha que corresponen a 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 i 500 de la mateixa. Existeixen també pesos amb altres formes geomètriques regulars (barrils, cons, cilindres).

El fet de tenir un sistema estandarditzat de pesos i mesures, amb múltiples i divisors d'una determinada unitat, posa en evidència l'ús d'una matemàtica pràctica i mostra la utilització de càlculs matemàtics i el coneixement de nocions de geometria bàsica.

Una de les característiques de les construccions que es van fer a Harappa va ser una avançada tecnologia per a fabricar maons cuits al forn i l'establiment d'estàndards en les proporcions de les mesures d'aquests maons que van usar-se durant molt de temps. Tot i que s'han identificat fins a quinze mides diferents de maons, la raó estàndard de les tres dimensions—longitud, amplada i gruix—és sempre 4:2:1, denominada «proporció de l'Indus». Es van utilitzar motlles estandarditzats des del 4000-3600 aC.



FIGURA 1. Ruïnes arqueològiques de Mohenjo-Daro

L'estudi de maons d'Harappa, Mohenjo-Daro i Lothal mostra que certs maons de mides diferents tenen dimensions que són múltiples enters de les respectives unitats de longitud trobades en cada ciutat. Tot i que la proporció 4:2:1 va ser la típica per als grans maons a Harappa, algunes ciutats van fer servir relacions diferents, com ara Kalibangan que va usar la relació 3:2:1. Més enllà dels motlles, els estàndards es van preservar en la tradició dels artesans i en les normes socials (Khan & Lemmen, 2014: 5).

No s'han desxifrat els símbols i inscripcions de la civilització de la vall de l'Indus, però la supervivència d'objectes com ara els pesos o els maons estandarditzats constitueix una font primària que «parla» de la transmissió de coneixements matemàtics. La relació entre les formes dels maons i les unitats de longitud, entre tecnologia i metrologia, van tornar a aparèixer a l'antiga Índia segles més tard, durant el període vàedic, en la construcció d'altars.

### **Altars per al ritualisme vàedic**

Entre el 1900 aC i el 1300 aC es va produir un declivi, les raons del qual estan encara per explicar. Durant aquest període les tecnologies clau van quedar fora d'ús i, progressivament, la població va anar abandonant els nuclis urbans.

Amb l'arribada dels aris procedents del nord, s'inicia l'època vàedica (1500 aC - 500 aC). El pensament vàedic es va expressar a través de la llengua sànscrita. L'hinduisme i el sànscrit van estar íntimament relacionats (Deva Sthanam, 2014). De fet, el sànscrit va evolucionar i va permetre la transmissió del discurs religiós en els *Vedes* (llibres sagrats dels antics indoaris) que incloïen pràctiques de

contingut matemàtic. Les característiques pròpies del sànscrit van facilitar l'expressió dels raonaments matemàtics i van sustentar la tradició lingüística de representar els nombres mitjançant paraules (Joseph, 1996: 301).

Entre els *Vedes*<sup>1</sup> hi ha els *Brahmanes*, que són manuals pràctics escrits per als bramans, sacerdots que realitzaven els sacrificis i els ritus sagrats. Les fonts més importants per a estudiar les matemàtiques vèdiques es troben en els apèndixs dels *Vedes* (*Vedanges*) que subministraven dades auxiliars per a la comprensió dels *Vedes*. N'hi ha de dedicats a l'astronomia –enfocada a seleccionar les dates adequades per a realitzar els ritus i orientar bé els altars i les pregàries– i de relacionats amb les regles dels rituals i cerimònies (*kalpa*). Són els que concentren les fonts més importants de les matemàtiques del període vèdic.

Les dades es trobaven en forma de *sutres* (regles expressades en forma d'aforismes i sovint en estil poètic) per a captar l'essència d'una argumentació o resultat. Això va ajudar a preservar els continguts. S'evitaven els verbs i els noms compostos llargs per facilitar-ne la memorització i fer estalvi de material escrit.

Els *Kalpasutres* (regles dels rituals i cerimònies) incloïen els *Sulbasutres*, textos que es refereixen a les mesures per a la construcció dels altars. La major part del que es coneix de la geometria vèdica prové dels *Sulbasutres*, escrits entre el 800 aC i el 200 aC.

Els *Sulbasutres* van sorgir per la necessitat de recollir per escrit l'orientació, la forma i l'àrea dels altars, segons estava escrit en els llibres sagrats vèdics. Així, per a l'orientació van desenvolupar l'astronomia i per a les formes i les àrees, la geometria. Eren manuals pràctics amb instruccions concretes que portaven implícits resultats i teoremes geomètrics que ja no es qüestionaven. Descriuen, per exemple, la construcció d'un altar amb una forma determinada; la fusió de dos quadrats per construir un quadrat d'àrea igual a la suma dels dos; la transformació d'un rectangle en un quadrat de la mateixa àrea, o la conversió d'un cercle en un quadrat de «la mateixa» àrea o viceversa.

Els autors dels *Sulbasutres* coneixien resultats matemàtics com el teorema de Pitàgores, tal i com es posa de manifest quan Baudhayana (ca. 800 aC) va escriure: «La soga que s'estén al llarg de la diagonal d'un quadrat produeix una àrea que és el doble de la del quadrat original», o quan Katyayana (ca. 200 aC) indicava: «La soga que s'estén sobre la diagonal d'un rectangle produeix una àrea que és la que donen els costats vertical i horitzontal junts» (Puig-Pla *et al.*, 2011).

Pel que fa a la construcció dels altars vèdics, aquests es realitzaven amb maons de diverses mides i havien de tenir unes proporcions molt precises. Per als ritus domèstics podien ser de forma quadrada o circular, però per als ritus públics eren més elaborats, per exemple en forma d'au, com ara un falcó en el moment d'emprendre el vol (fig. 2), tot utilitzant maons amb cares en forma de rectangles, trapezis, triangles...

Durant l'època vèdica, el ritualisme religiós i les estructures lingüístiques del sànscrit van ser els principals vehicles de transmissió dels coneixements astronòmics i geomètrics.

### **Cosmologia no teista del jainisme (ca. 500-200 aC)**

Si durant el període dels bramans les matemàtiques van servir per a l'objectiu principal dels rituals, l'auge del budisme i el jainisme va representar una rebel·lió contra els rituals i els sacrificis de les

---

1. Els *Vedes* s'estudien distribuïts en quatre èpoques segons les seves datacions: *Samhites* (ca. 1000 aC), *Brahmanes* (ca. 800 aC), *Aranyakes* (ca. 700 aC) i *Upanishads* (ca. 600-500 aC).



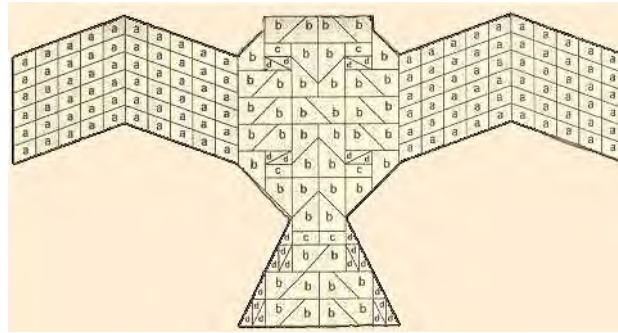


FIGURA 2. Altar vèdic amb la imatge d'un falcó

religions bramàniques. Des del punt de vista de la ciència, els budistes semblen haver-se especialitzat en medicina mentre que els jaines ho van fer en matemàtiques. De fet, a Vardhamana Mahavira, considerat el fundador del jainisme, se l'associa amb un matemàtic (Agrawal, s. d.).

El mèrit de donar a les matemàtiques la forma d'una disciplina abstracta va correspondre als jaines, tot i que les fonts d'informació sobre les seves matemàtiques són escasses i poc estudiades.

Les idees cosmològiques no teistes del jainisme on el temps és etern i sense forma, el món és infinit i increat (sempre ha existit) i l'espai ho envaeix tot i no té forma, semblen haver estat un factor motivador del desenvolupament de les idees sobre l'infinit matemàtic.<sup>2</sup> Els jaines van interessar-se per enumerar els nombres molt grans i en el text *Anuyoga Dwara sutra* (s. II o I aC) deien: «encara no s'ha aconseguit el nombre més alt enumerable» (O'Connor & Roberston, 2000).

### Versos per a l'astronomia matemàtica

El període àlgid de l'astronomia i les matemàtiques índies va arribar a l'època clàssica (400-1200), període en el qual apareixen matemàtics i astrònoms molt destacats com Aryabhata (s. v - s. vi), Brahmagupta (s. vii) o Bhaskara II (s. xii) (Guevara & Puig, 2017).

És a l'inici d'aquest període, cap a la meitat del primer mil·lenni de la nostra era, quan hi va haver una notable activitat matemàtica a l'Índia que es va reflectir en un augment significatiu del nombre de referències a textos d'astronomia, els *siddhantes*, si bé pocs d'ells han sobreviscut.

El *siddhanta* més antic preservat és l'*Aryabhatiya* (499) escrit per Aryabhata (476 - ca. 550). El capítol segon està dedicat a les matemàtiques (*ganita* o càlculs) i està constituït per 33 versos (fig. 3) en una mètrica sànscrita anomenada *arya* (Plofker, 2007: 399). Bhaskara I (ca. 600 - ca. 680) va escriure el comentari més antic d'aquesta obra, l'*Aryabhatiyabhasya* (629).

Els *siddhantes* eren tractats d'astronomia matemàtica, feien càlculs de temps i predeïen localitzacions de fenòmens celestes, subministraven procediments per als càlculs astronòmics i també instruïen en el coneixement matemàtic general (operacions aritmètiques bàsiques, càlculs d'interessos sobre préstecs, regles per a calcular àrees, volums o sumes de sèries, etc.).

2. La cosmologia dels jaines contemplava un període de temps de 2588 anys, és a dir: 1013 065324 433836 171511 818326 096474 890383 898005 918563 696288 002277 756507 034036 354527 929615 978746 851512 277392 062160 962106 733983 191180 520452 956027 069051 297354 415786 421338 721071 661056 anys. D'altra banda, la matemàtica dels jaines va reconèixer cinc tipus diferents d'infinit: infinit en una direcció, infinit en dues direccions, infinit en l'àrea, infinit a tot arreu i infinit perpètuament.



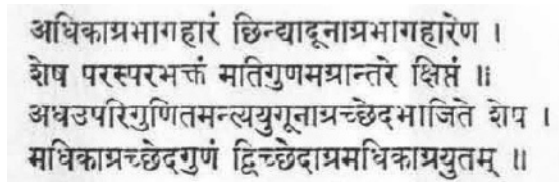


FIGURA 3. Versos sàncrits de l'Aryabhatiya

Un dels *siddhantes* anteriors al d'Aryabhata, és el *Surya Siddhanta*.<sup>3</sup> Els seus continguts estaven escrits, segons la tradició clàssica de la poesia índia d'expressar idees complexes líricament, amb un compàs de rima en forma d'un *shloka*, una categoria d'estrofa de la mètrica índia (la mètrica més comuna del s. IV). De manera que el mètode utilitzat consistia a expressar els continguts (astronòmics i matemàtics) en forma de versos.

Aquesta forma d'enregistrar els sabers tenia l'avantatge que resultava més fàcil de recordar, transmetre i preservar el coneixement. Però també presentava problemes ja que els nombres no tenien sinònims de rima. Calien regles addicionals (creatives) que s'havien de saber interpretar; s'utilitzava un llenguatge simbòlic amb doble sentit que un lector competent sabia interpretar. Per exemple, en lloc del «nombre u» (1), s'usava una paraula, *rupa*, que significava Lluna, perquè només hi ha una Lluna o també *bhumi*, Terra, pel mateix motiu; el dos (2) podia ser *yama* (dues vegades) o *kara* (mans), etc. (Joseph, 1996: 330; Ifrah, 1997: 926-930).

El text transmetia en forma poètica els continguts (taules, passos per a calcular òrbites complexes, predicció d'eclipsis, etc.). Aquest enfocament críptic ofería una major flexibilitat per a la construcció poètica. El *Surya Siddhanta* i, en general, els *siddhantes* consistien així en regles críptiques escrites en versos sàncrits.

Eren compendis d'astronomia fàcils de recordar, transmetre i utilitzar com a referència o ajuda per a la persona experimentada, que no pretenien oferir comentaris, explicacions o demostracions. Per això apareixerien, posteriorment, comentaristes dels *siddhantes* que ajudaven a entendre els textos.

El sistema de numeració alfanumèric utilitzat per Aryabhata permet fer-nos una idea de la complexitat de les regles críptiques en la presentació dels continguts. En els seus versos va assignar nombres concrets a fonemes específics del sàncrit. Així, les 25 consonants *varga* (lletres «normals») es corresponien als nombres de l'1 al 25; les 8 consonants *avarga* (lletres «variants») s'associaven als nombres 30, 40, etc. fins al 100; les 9 vocals representaven les potències parells de 10 (1, 10<sup>2</sup>, 10<sup>4</sup>..., fins a 10<sup>16</sup>) i si aquestes vocals seguien a una consonant *avarga*, llavors expressaven les potències senars (10, 10<sup>3</sup>..., fins a 10<sup>17</sup>).

Consonants i vocals es podien combinar formant nombres. D'aquesta manera, per exemple, Aryabhata expressava paràmetres astronòmics a la seva obra mitjançant una mena d'argot estrany, inintel·ligible si no es coneixia el seu sistema alfanumèric, quan per exemple escrivia: «Les revolucions del Sol en un *mahayuga* [un període cosmològic de temps] són *khyu-ghr*, Lluna *ca-ya-gi-yi-nu-suchlr*, Terra *ni-si-nl-skhr*, cap a l'est». Versos que es tradueixen, usant el particular sistema d'Aryabhata, com: «el nombre de revolucions del Sol en un *mahayuga* és de 4.320.000 anys, el de la Lluna,

3. L'astrònom i matemàtic indi Varahamihira (ca. 505-587) va escriure una obra, el *Panchasiddhantika*, on subministrava informació sobre textos indis més antics, que actualment estan perduts, en particular sobre el *Surya-siddhanta* o *siddhanta del Sol*.

57.753.336 anys, i el de [rotacions diàries de] la Terra en direcció est, de 1.582.237.500» [rotació axial de la Terra]<sup>4</sup> (Plofker, 2009: 75; Dutta, 2006).

### **Consideracions finals**

Darrere la fabricació d'un maó estandarditzat, les normes de construcció d'un altar o la redacció de versos hi ha un seguit de coneixements matemàtics que, de forma progressiva i cada cop més sofisticada, es van anar transmetent entre els antics habitants del subcontinent indi.

Una peça en forma d'hexàedre, un maó de fang cuit, un altar en forma d'au, o un vers críptic escrit en sànscrit van esdevenir objectes de la cultura material de les matemàtiques i van constituir-se en singulars mitjans de transmissió de coneixements d'aquesta ciència a l'antiga Índia.

---

4. Aryabhata, tot i que potser és poc conegut, va plantejar la idea de la rotació de la Terra mentre els estels es mantenien fixos.

## Referències bibliogràfiques

- AGRAWAL, D. P. (s. d.), *Ancient Jaina Mathematics: an Introduction*, [en línia] <[https://www.infinityfoundation.com/mandala/t\\_es/t\\_es\\_agraw\\_jaina\\_frameset.htm](https://www.infinityfoundation.com/mandala/t_es/t_es_agraw_jaina_frameset.htm)> [Darrer accés: 22/12/17].
- DEVA STHANAM (2014), *The importance of Sanskrit to Hinduism*, [en línia] <<http://sanskrit.org/the-importance-of-sanskrit-to-hinduism-2/>> [Darrer accés: 15/11/17].
- DUTTA, A. K. (2006), «Aryabhata and Axial Rotation of Earth - Khagola (The Celestial Sphere)», *Resonance*, 11, (3), 51-68; (4), 56-74; (5), 58-72.
- KHAN, A.; LEMMEN, C. (2014), *Bricks and urbanism in the Indus Civilization*, [en línia] <<http://arxiv.org/pdf/1303.1426.pdf>> [Darrer accés: 16/02/18].
- GUEVARA, I.; PUIG, C. (2017), *Brahmagupta. El àlgebra de las estrellas*, Barcelona, RBA.
- IFRAH, G. (1997), *Historia universal de las cifras*, Madrid, Espasa-Calpe.
- JOSEPH, G. G., (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide.
- NATIONAL GEOGRAPHIC (2012), *La civilización del valle del Indo es más antigua que la egipcia y la babilónica* [en línia] <[http://www.nationalgeographic.com/es/historia/actualidad/la-civilizacion-del-valle-del-indo-es-mas-antigua-que-la-egipcia-y-la-babilonica\\_6828](http://www.nationalgeographic.com/es/historia/actualidad/la-civilizacion-del-valle-del-indo-es-mas-antigua-que-la-egipcia-y-la-babilonica_6828)> [Darrer accés: 28/01/17].
- NATIONAL GEOGRAPHIC (2014), *La cultura del valle del Indo*, [en línia] <[http://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/la-cultura-del-valle-del-indo\\_8008/](http://www.nationalgeographic.com.es/historia/grandes-reportajes/la-cultura-del-valle-del-indo_8008/)> [Darrer accés: 25/01/17].
- O'CONNOR, J. J.; ROBERSTON, E. F. (2000), *Jaina mathematics*. [en línia] <[http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Jaina\\_mathematics.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Jaina_mathematics.html)> [Darrer accés: 16/11/17].
- PLOFKER, K. (2007), «Mathematics in India». A: KATZ, V. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook*, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 385- 514.
- PLOFKER, K. (2009), *Mathematics in India*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.
- PUIG-PLA, C.; GUEVARA, I.; ROMERO, F.; MASSA, M. R. (2011), «La trigonometria a la matemàtica de l'Antiga Índia. Algunes idees per treballar a l'aula». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (ed.), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana Marí»*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica - Institut d'Estudis Catalans, 53-60.

**ACTES DE LA  
XV JORNADA  
SOBRE LA HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA  
I L'ENSENYAMENT**